

N° d'ordre : 117

N° attribué par la bibliothèque : 99ENSL0117

THÈSE

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON
Laboratoire de Physique

pour l'obtenir le grade de
Docteur de l'École normale supérieure de Lyon
spécialité : Physique

au titre de la formation doctorale de : L'ÉCOLE DOCTORALE DE PHYSIQUE

Présentée et soutenue publiquement le 31/03/99

par Monsieur SÉBASTIEN AUMAÎTRE

Titre :

Étude des fluctuations de grandeurs globales dans des systèmes
dissipatifs hors-équilibre

Directeur de thèse FAUVE STÉPHAN

Devant la commission d'examen composé de :

Monsieur	PATRICK BONTOUX	Membre
Monsieur	BERNARD CASTAING	Membre/Rapporteur
Monsieur	SERGIO CILIBERTO	Membre
Monsieur	YVES COUDER	Membre
Monsieur	STÉPHAN FAUVE	Membre
Monsieur	ALAIN PUMIR	Membre/Rapporteur

N° d'ordre : 117

N° attribué par la bibliothèque : 99ENSL0117

THÈSE

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON
Laboratoire de Physique

pour l'obtenir le grade de
Docteur de l'École normale supérieure de Lyon
spécialité : Physique

au titre de la formation doctorale de : L'ÉCOLE DOCTORALE DE PHYSIQUE

Présentée et soutenue publiquement le 31/03/99

par Monsieur SÉBASTIEN AUMAÎTRE

Titre :

Étude des fluctuations de grandeurs globales dans des systèmes
dissipatifs hors-équilibre

Directeur de thèse FAUVE STÉPHAN

Devant la commission d'examen composé de :

Monsieur	PATRICK BONTOUX	Membre
Monsieur	BERNARD CASTAING	Membre/Rapporteur
Monsieur	SERGIO CILIBERTO	Membre
Monsieur	YVES COUDER	Membre
Monsieur	STÉPHAN FAUVE	Membre
Monsieur	ALAIN PUMIR	Membre/Rapporteur

Table des matières

1	Introduction: Rappels de résultats théoriques sur la statistique des grandeurs globales.	7
1.1	Motivations.	7
1.2	rappel de quelques définitions.	8
1.2.1	Moyenne temporelle, moyenne spatiale et moyenne d'ensemble.	8
1.2.2	Théorème central limite et loi des larges déviations.	9
1.3	La loi de EVANS, COHEN, MORRISS ou "théorème de GALLAVOTTI-COHEN". . . .	12
1.3.1	Rappels de quelques définitions sur les systèmes dynamiques.	13
1.3.2	le théorème de GALLAVOTTI-COHEN.	15
1.4	Quels dispositifs expérimentaux pour l'étude des fluctuations de grandeurs globales?	21
1.4.1	Grandeurs globales et puissance injectée en convection de RAYLEIGH-BÉNARD.	21
1.4.2	Grandeurs globales et puissance injectée dans l'écoulement de VON KÁRMÁN.	23
	Bibliographie	24
2	Mesures locales des forces de trainée et de leurs corrélations spatiales dans l'écoulement de VON KÁRMÁN.	25
2.1	Introduction	25
2.2	L'écoulement de VON KÁRMÁN.	26
2.2.1	Principe de la mesure.	26

2.2.2	Description du dispositif de mesure.	29
2.3	Résultats pour le montage quatre pales-huit pales contra-rotatif en écoulement confiné.	30
2.3.1	Histogrammes des fluctuations de pression et de la trainée locale	30
2.3.2	Densité spectrale de puissance et spectres croisés des fluctuations de pression.	42
2.4	Quelques résultats qualitatifs dans d'autres configurations de l'écoulement de VON KÁRMÁN.	51
2.4.1	Écoulement contra-rotatif confiné quatre pales-quatre pales.	52
2.4.2	Écoulement ouvert dissymétrique quatre pales-huit pales.	55
2.4.3	Écoulement co-rotatif confiné quatre pales-quatre pales.	55
2.5	Conclusions	58
	Bibliographie	60
3	Fluctuations globales de température et de flux thermique en convection de RAYLEIGH-BÉNARD turbulente	61
3.1	Introduction : la convection de RAYLEIGH-BÉNARD dans le cadre des approximations de BOUSSINESQ.	61
3.1.1	Les approximations de BOUSSINESQ	61
3.1.2	Quelques résultats en convection de RAYLEIGH-BÉNARD turbulente.	65
3.2	Dispositifs expérimentaux	67
3.2.1	Description de la cellule I	68
3.2.2	Cellule II	71
3.2.3	Cellule III: convection dans le CO_2 gazeux près du point critique.	74
3.3	Résultats expérimentaux sur les fluctuations de grandeurs globales en convection turbulente.	83
3.3.1	Étalonnage des capteurs de flux thermique et loi de puissance entre le nombre de NUSSELT et de RAYLEIGH dans les cellules I et II.	84
3.3.2	Fluctuations de la température et de ses gradients moyennés sur une ligne.	88

3.3.3	Fluctuations du flux thermique	99
3.4	conclusions	116
	Bibliographie	117
4	Test de la loi de EVANS, COHEN, MORRIS (“ théorème de GALLAVOTTI-COHEN”) sur quelques systèmes physiques.	118
4.1	Introduction	118
4.2	Test du théorème de GALLAVOTTI-COHEN sur des modèles numériques de systèmes dissipatifs.	120
4.2.1	La chaîne de patins à frottement non linéaire.	120
4.2.2	Le milieu granulaire vibré.	131
4.2.3	Le modèle en couches GOY.	140
4.3	Test du théorème de GALLAVOTTI-COHEN sur les mesures expérimentales de puis- sance.	142
4.3.1	Cas de l’écoulement de VON KÁRMÁN.	143
4.3.2	Cas de la convection de RAYLEIGH-BÉNARD.	145
4.4	Conclusions	147
	Bibliographie	150
5	Conclusions.	151
	Bibliographie	154
	Annexes	156
A	Influence du transfert radiatif sur la convection à flux fixé.	156
A.1	Introduction	156
A.2	Equations du mouvement convectif d’un fluide en présence de radiations.	157
A.2.1	Approximations sur le fluide.	157

A.2.2	Approximations sur le rayonnement.	158
A.2.3	Conditions aux limites.	159
A.3	Résultats attendus dans certains cas limites.	160
A.3.1	Equations sans dimensions.	160
A.3.2	Etude de certains cas limites.	161
A.3.3	Différences attendues entre la convection radiative et non radiative.	161
A.4	Seuil d'instabilité et courbe de stabilité marginale.	162
A.4.1	Etat statique et effet stabilisant des radiations.	162
A.4.2	Equations perturbatives.	163
A.4.3	Résolution numérique et commentaires.	163
A.4.4	Développement aux grandes longueurs d'onde.	165
A.5	Pour aller plus loin.	166
	Bibliographie	168
B	Equations générales pour un fluide en interaction avec un gaz de photons.	169
	Bibliographie	171
	Rappel Bibliographique	172

Chapitre 1

Introduction : Rappels de résultats théoriques sur la statistique des grandeurs globales.

1.1 Motivations.

Dans la plupart des approches théoriques de la turbulence, les fluctuations temporelles de grandeurs moyennées dans l'espace sont négligées. Par exemple, un moyen pour décrire les propriétés de transport d'un écoulement turbulent est d'introduire des coefficients effectifs constants sensés tenir compte des effets moyens de l'advection désordonnée à petite échelle. Pour justifier cette approximation, on invoque en général, comme en thermodynamique, la loi des grands nombres ou le théorème central limite qui prévoient des fluctuations gaussiennes des grandeurs globales qui, relativement à leur moyenne, vont décroître comme l'inverse du nombre de degrés de liberté. Or, en turbulence, on estime que ce nombre de degrés de liberté est égal au nombre de cellules statistiquement indépendantes que le volume de fluide en écoulement peut contenir. Ce nombre de cellules est reliée au nombre de REYNOLDS, Re , qui mesure l'importance du développement de la turbulence. Ainsi suivant la longueur de corrélation considérée on montre que les fluctuations relatives de grandeurs globales décroissent rapidement quand la turbulence augmente, i.e. on prédit des lois de puissance en $Re^{-9/8}$ ou $Re^{-3/4}$. Cela justifierait donc le fait qu'on néglige les fluctuations de ces grandeurs intégrées sur le volume de l'écoulement en turbulence pleinement développée.

Cependant, bien que peu d'études systématiques existent sur le sujet, on sait expérimentalement que, même à grand nombre de REYNOLDS, ces fluctuations peuvent atteindre jusqu'à 10% de la valeur moyenne, notamment pour la puissance injectée dans un écoulement confiné. De plus, ces fluctuations ne sont généralement pas gaussiennes. Nous nous sommes donc attachés à étudier sur deux écoulements différents, ces fluctuations de puissance injectée et notamment nous nous sommes concentrés sur la notion de longueur de corrélation dans le mécanisme d'injection d'énergie. Par

ailleurs, pour une classe particulière de systèmes dissipatifs, il existe une loi, due à EVANS, COHEN et MORRIS, décrivant la décroissance des fluctuations de la puissance injectée lorsqu'on intègre celle-ci sur des temps de plus en plus longs. Nous avons voulu vérifier si les prédictions de cette loi pouvaient s'appliquer à la puissance injectée dans des systèmes turbulents expérimentaux ou dans des modèles numériques de systèmes dissipatifs plus réalistes que ceux pour lesquels cette loi a été démontrée rigoureusement (Théorème de GALLAVOTTI-COHEN). Mais avant d'exposer les résultats de ce travail, détaillons un peu plus nos notations et les bases théoriques concernant les fluctuations de grandeurs globales.

1.2 rappel de quelques définitions.

1.2.1 Moyenne temporelle, moyenne spatiale et moyenne d'ensemble.

Rappelons tout d'abord quelques notions connues, mais qui nous seront utiles par la suite. Expérimentalement, on étudie généralement un système de volume V fini en mesurant des quantités $X(\mathbf{r}, t)$ fonctions de l'espace et du temps. La résolution spatiale de la mesure est limitée par la taille du capteur. Son temps de réponse fixe la résolution temporelle. A partir de ces grandeurs mesurées, on peut calculer deux moyennes distinctes :

- la moyenne spatiale notée $\langle X \rangle_V(t)$ qui formellement s'écrit

$$\langle X \rangle_V(t) = \frac{1}{V} \iiint_V X(\mathbf{r}, t) d^3r \quad (1.1)$$

et qu'expérimentalement on détermine, soit à partir de N capteurs placés en différents points du volume, on a alors

$$\langle X \rangle_V(t) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X(\mathbf{r}_i, t)$$

avec \mathbf{r}_i la position des capteurs ; soit en utilisant un capteur dont les dimensions sont proches de celle du système. Ce sont les quantités $V \langle X \rangle_V(t)$ que nous appelons *grandeurs globales*. Certaines grandeurs physiques comme l'énergie interne ou la puissance injectée sont par définition des grandeurs globales. On notera que ce sont a priori des fonctions du temps.

- la moyenne temporelle notée $\overline{X}(\mathbf{r})$ qui est définie par :

$$\overline{X}(\mathbf{r}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(\mathbf{r}, t') dt'. \quad (1.2)$$

Concrètement l'intégrale est estimée sur des intervalles de temps $[0, T]$ tels que $\overline{X}(\mathbf{r})$ soit indépendant de la taille de ces intervalles.

Théoriquement, en mécanique statistique, on décrit les propriétés macroscopiques d'un système de \mathcal{N} particules, dont le mouvement est connu par la donnée de leurs positions \mathbf{q} et leurs quantités

de mouvement \mathbf{p} ; à partir de moyennes d'ensemble définies sur l'espace des phases \mathcal{E} par :

$$\langle X \rangle_{\mathcal{E}}(t) = \int_{\mathcal{E}} X(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i\}) \rho(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i\}, t) \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} d^3 p_i d^3 q_i \quad (1.3)$$

où $\{\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i\}$ définissent les $6\mathcal{N}$ coordonnées d'un point de \mathcal{E} dont la trajectoire ultérieure est décrite par les $6\mathcal{N}$ équations du mouvement. La valeur $X(\mathbf{r}, t)$ mesurée en un point se déduit de $X(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i\})$ par une moyenne autour du point \mathbf{r} :

$$X(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathcal{E}} X(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i\}) \rho(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i\}, t) \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \delta(\mathbf{q}_i - \mathbf{r}) d^3 p_i d^3 q_i$$

$\rho(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i\}, t)$ est la densité de probabilité que le système se trouve dans l'élément de volume $\{\mathbf{q}_i + d\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i + d\mathbf{p}_i\}$ de \mathcal{E} à l'instant t . Idéalement, $\rho(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i\}, t)$ pourrait être déterminée en suivant l'évolution d'une infinité de systèmes obéissant à la même dynamique mais préparés avec des conditions initiales différentes. On obtient $\rho(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i\}, t)$ en comptant la fraction de ces systèmes dont l'ensemble des coordonnées des particules qui les composent se trouve dans un élément de volume de \mathcal{E} autour du point $\{\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i\}$ au bout d'un temps t . $\rho(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i\}, t)$ est une densité de probabilité. Elle est donc normée :

$$\int_{\mathcal{E}} \rho(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i\}, t) \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} d^3 p_i d^3 q_i = 1.$$

Cette équation de conservation s'appelle sous sa forme locale équation de LIOUVILLE :

$$\partial_t \rho + \frac{\partial(\dot{\mathbf{q}}_i \rho)}{\partial \mathbf{q}_i} + \frac{\partial(\dot{\mathbf{p}}_i \rho)}{\partial \mathbf{p}_i} = 0 \quad (1.4)$$

Pour les systèmes conservatifs, dont la dynamique suit les équations de HAMILTON, on montre que $\rho(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i\}, t)$ est incompressible ,i.e

$$\frac{d}{dt} [\rho(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i\}, t)] = 0.$$

Le système est alors supposé *ergodique*, c'est à dire qu'il y a équivalence entre moyenne temporelle et moyenne d'ensemble : $\langle X \rangle_{\mathcal{E}} \equiv \overline{\langle X \rangle_V}$. Dans les systèmes dissipatifs, les densités de probabilité dans l'espace des phases ne sont plus conservées au cours du temps. Le théorème de GALLAVOTTI-COHEN, que nous exposons par la suite, propose une distribution des probabilités de présence dans \mathcal{E} pour laquelle une telle équivalence entre moyenne temporelle et moyenne d'ensemble existerait pour des systèmes dissipatifs dans un état stationnaire.

1.2.2 Théorème central limite et loi des grandes déviations.

Le théorème central limite (TCL) a une importance capitale en physique statistique, car il est invoqué lorsqu'on veut démontrer la pertinence de la limite thermodynamique, c'est à dire le fait que l'on puisse définir des grandeurs thermodynamiques moyennes extensives dont les fluctuations relatives tendent vers zéro lorsque le nombre de degrés de liberté du système tend vers l'infini. Il explique également la forme gaussienne des distributions des fluctuations de ces grandeurs thermodynamiques autour de leur valeur moyenne.

Enoncé du Théorème central limite.

Considérons N variables aléatoires indépendantes x_i distribuées selon une loi $p_i(x_i)$ d'écart type fini $\sigma_i(x_i)$ et de moyenne m_i . Le TCL prévoit quelle sera la distribution de probabilité $P_N(S_N)$ de la variable aléatoire S_N formée de la somme $\sum_{i=1}^N (x_i - m_i) / \sqrt{\sum_{i=1}^N \sigma_i^2}$ dans la limite où N tend vers l'infini. Il s'énonce comme suit : il existe toujours un ϵ tel que

$$\max | \lim_{N \rightarrow \infty} \{P_N(S_N) - G(S_N)\} | < \epsilon$$

avec

$$G(S_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{S_N^2}{2}\right).$$

Pour des variables aléatoires x_i distribuées suivant la même loi de probabilité on a pour $X_N = \sum_{i=1}^N x_i$: $\langle X_N \rangle = Nm$ ($\langle X_N \rangle$ est extensif) et $\sigma_N(X_N) = \sqrt{N}\sigma(x_i)$ d'où l'on déduit la loi des grands nombres :

$$\frac{\sigma_N(X_N)}{\langle X_N \rangle} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Quand N est de l'ordre du nombre d'AVROGADRO, on décrira très bien les propriétés du système en ne considérant que les valeurs moyennes, comme on le fait en thermodynamique. Pourtant comme nous allons le voir, il existe des exemples, en turbulence notamment, où l'augmentation du nombre de degrés de liberté, i.e de N , ne semble pas entraîner une diminution des fluctuations suivant la loi des grands nombres. A ce titre, on doit noter que le TCL est assorti de conditions de validité :

- les variables aléatoires x_i doivent être *indépendantes*.
- le TCL n'est vrai que si tous les $\sigma_i(x_i)$ *existent*, ce qui exclu les distributions de type lorentzienne pour $p_i(x_i)$.
- le TCL ne donne *pas d'information sur la convergence des queues de distribution*. Mais pour les déviations grandes devant l'écart type, il est possible d'établir une loi plus générale valide pour les larges déviations.

Application du TCL aux fluctuations de grandeurs globales.

Pour des systèmes de grande dimension, pour lesquels il existe une longueur de corrélation $l_c \ll V^{1/3}$, au-delà de laquelle, deux points séparés d'une distance supérieure à l_c évoluent indépendamment l'un de l'autre, on peut supposer que le nombre de degrés de liberté indépendants est proportionnel au nombre de cubes de volume l_c^3 que l'on peut inclure dans V . En effet, d'après la définition de l_c , la mesure d'une variable A dans un de ces cubes est indépendante de celle faite dans les autres. La grandeur globale associée à A sera la somme des valeurs mesurées à un instant

t dans tous les cubes inclus dans V . D'après le théorème central limite, on s'attend à des fluctuations gaussiennes de $\langle A \rangle_V(t)$ autour de sa valeur moyenne. Si on peut diminuer la longueur de corrélation du système alors on doit pouvoir observer une diminution des fluctuations relatives en :

$$\frac{\sigma(\langle A \rangle_V)}{\langle A \rangle_V} \propto t_c^{3/2}$$

Application du TCL à la trace temporelle d'un signal.

Supposons que l'on s'intéresse à la façon dont la trace temporelle d'un signal $A(t)$ converge vers sa valeur moyenne \bar{A} lorsqu'on l'intègre sur des intervalles de temps τ de plus en plus long. Pour ce faire, définissons la quantité dite *lissée*

$$A_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} A(t') dt'$$

Supposons τ très grand devant T_c le temps d'autocorrélation du signal, i.e le temps au bout duquel les deux points $A(t)$ et $A(t+T_c)$ du signal sont indépendants l'un de l'autre. Si on écrit $A_\tau(t)$ sous la forme :

$$A_\tau(t) = \frac{1}{NT_c} \sum_{j=1}^N \int_{t+jT_c}^{t+(j+1)T_c} A(t') dt'$$

les différents termes de la somme sont indépendants, et comme $N = \tau/T_c$ est grand, on peut appliquer le TCL. Donc les fluctuations de $A_\tau(t)$ autour de \bar{A} doivent devenir gaussiennes quand τ augmente et elles doivent décroître proportionnellement à $\sqrt{\tau}$.

Cependant, si on regarde l'évolution de la probabilité d'avoir $A_\tau(t) = \Delta$, avec $\Delta \geq \sigma(A)$ fixé, quand τ augmente, on doit tenir compte du fait que cette probabilité devient celle d'un événement rare puisque $A_\tau(t)$ se resserre autour de sa moyenne. Elle ne sera donc pas bien décrite par le TCL. On utilisera alors plutôt la loi des larges déviations énoncée ci-après.

Loi des larges déviations

On s'intéresse à la distribution d'une somme de variables aléatoires $X_N = 1/N \sum_{i=1}^N x_i$, où les x_i sont définis sur un domaine fini. La probabilité que X_N appartienne à un intervalle I infiniment petit contenant X , est telle que, pour N grand [1]

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \log(P_N(X_N \in I)) &= S(I) \\ \frac{1}{N} \log(P_N(X_N = X)) &\approx S(X) \end{aligned}$$

Où $S(X)$ est assimilée à une entropie car elle en a toutes les propriétés. On remarque que pour $S(X) = -(X^2 - \sum_{i=1}^N m_i/N)/(2 \sum_{i=1}^N \sigma_i^2)$, on retrouve la gaussienne du TCL.

Cette loi, très générale, sur les sommes de variables aléatoires, est utilisée par O.E LANFORD [1] dans le cadre de la mécanique statistique. Il s'intéresse à un système, de volume V , contenant N particules ayant un potentiel d'interaction dont la portée R est finie, dans lequel il considère l'observable $f(\{p_i, q_i\})$ définie sur \mathcal{E} et telle que $f(\{p_i, q_i, p'_j, q'_j\}) = f(\{p_i, q_i\}) + f(\{p'_j, q'_j\})$ pour $|q_i - q'_j| \geq R$. Pour ce système, il montre qu'à la limite thermodynamique (où $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ mais $n = N/V$ reste constant), la probabilité, $P(N, V, f, J)$, d'observer une valeur de $f(\{p_i, q_i\})/N$ dans un intervalle J (qui peut être aussi petit que l'on veut) suit une loi de larges déviations que l'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{P(N, V, f, J_1)}{P(N, V, f, J_2)} \Big|_{N, V \rightarrow \infty} = \exp[N(S(n, f, J_1) - S(n, f, J_2))]$$

où $S(n, f, J)$ qui ne dépend pas directement ni de N ni de V , est l'entropie du système divisée par le nombre de particules, et est donc maximum si J correspond à la valeur d'équilibre de f/N . On voit sur cette formule que la probabilité d'observer une autre valeur que celle à l'équilibre, décroît exponentiellement quand N augmente, i.e la distribution des probabilités de $f(\{p_i, q_i\})/N$ tend vers une distribution δ centrée sur la valeur à l'équilibre quand $N \rightarrow \infty$.

GALLAVOTTI et COHEN [2] étendent ce type d'approche aux systèmes dissipatifs hors-équilibre stationnaires, qu'ils considèrent du point de vue des *systèmes dynamiques*. Moyennant certaines propriétés du système, ils démontrent une loi pour les fluctuations du *taux de création d'entropie* autour de la valeur 0 (qui n'est pas la valeur moyenne du *taux de création d'entropie* pour un système dissipatif). C'est à la description cette loi, aussi appelée loi de EVANS, COHEN et MORRISS, que nous consacrons le paragraphe suivant.

Mais avant cela, notons qu'au voisinage de 0, pour une somme de variables aléatoires quelconques $X_N = 1/N \sum_{i=1}^N x_i \approx 0 \pm \epsilon$, on peut écrire la loi des larges déviations sous la forme :

$$\frac{1}{N} \log \left(\frac{P_N(\epsilon)}{P_N(-\epsilon)} \right) \approx 2 \frac{\partial S(X)}{\partial X} \Big|_{X=0} \epsilon.$$

C'est aussi la forme que prend la loi de EVANS, COHEN et MORRISS. Il nous faudra tenir compte de cette remarque lors que nous chercherons à tester expérimentalement de cette loi.

1.3 La loi de EVANS, COHEN, MORRISS ou "théorème de GALLAVOTTI-COHEN".

Pour décrire les phénomènes de transport dans les fluides (diffusivité, viscosité...) ou dans les solides (conductivité électrique,...), on a été amené à simuler numériquement un ensemble de particules soumises à un champ extérieur. Mais rapidement, dans de telles simulations, il faut prendre en compte les échanges thermiques avec l'environnement extérieur, pour éviter que la température de l'ensemble des particules ne croisse indéfiniment. Pour ce faire, il a été introduit dans certains modèles numériques une dissipation effective permettant de maintenir constante l'énergie du système [3]. Or, comme nous allons le voir, cette dissipation effective se trouve être reliée au *taux de création d'entropie* du système dynamique ainsi obtenu. Pour de telles modélisations

d'un fluide soumis à un cisaillement, EVANS, COHEN et MORRISS ont montré que les fluctuations de ce taux de création d'entropie devaient suivre une loi particulière dite loi de EVANS, COHEN, MORRISS ou E.C.M [4]. Cette loi a été redémontrée sous forme d'un théorème applicable aux systèmes *dissipatifs, réversibles, et chaotiques* par GALLAVOTTI et COHEN [2]. Ce théorème est important puisqu'il propose une expression pour la mesure ergodique de l'espace des phases, (i.e pour le poids statistique des éléments de volume dans l'espace des phases), pour des systèmes dissipatifs stationnaires réversibles. Par extension, on peut supposer cette expression également valable pour décrire les systèmes physiques réels généralement irréversibles.

Pour comprendre l'origine de ce théorème, il faut faire appel à certains éléments de la théorie des systèmes dynamiques. Nous rappellerons donc dans un premier temps quelques définitions sur les systèmes dynamiques qui nous seront utiles. Pour mieux illustrer ce théorème, après l'avoir énoncé, nous l'appliquerons sur un exemple simple.

1.3.1 Rappels de quelques définitions sur les systèmes dynamiques.

Nous ne présentons ici que de manière informelle les quelques notions sur les systèmes dynamiques indispensables pour comprendre le théorème de GALLAVOTTI-COHEN. Pour plus de détails on pourra se reporter à [5, 3]. Par la suite, nous appellerons Γ un point de l'espace des phases \mathcal{E} , repéré par les $6\mathcal{N}$ coordonnées des \mathcal{N} vecteurs $\{q_i, p_i\}$. Sa trajectoire $\Gamma(t)$ est donnée par les $6\mathcal{N}$ équations du mouvement.

Exposants de LYAPUNOV et volume dans l'espace des phases.

Considérons deux trajectoires $\Gamma_1(t)$ et $\Gamma_2(t)$ infiniment proches du point Γ_o à l'instant t_o . La distance qui les sépare dans l'espace des phases, notée $\delta V_1(\Gamma_o, t_o) = |\Gamma_2(t_o) - \Gamma_1(t_o)|$, va croître exponentiellement dans une certaine direction (cf figure 1.1). Au bout d'un temps t on a :

$$\delta V_1(\Gamma_o, t) = \delta V_1(\Gamma_o, t_o) \exp(\lambda_1(t - t_o))$$

λ_1 est l'exposant de LYAPUNOV maximum. Si l'on considère maintenant une troisième trajectoire $\Gamma_3(t_o)$ définissant avec les deux précédentes une surface $\delta V_2(\Gamma_o, t_o)$. Au bout d'un temps t , cette surface évoluera suivant

$$\delta V_2(\Gamma_o, t) = \delta V_2(\Gamma_o, t_o) \exp((\lambda_1 + \lambda_2)(t - t_o))$$

λ_2 est l'exposant de LYAPUNOV juste inférieur à λ_1 . En continuant ainsi on obtient que le volume infinitésimal de dimension $6\mathcal{N}$ entourant le point Γ_o à l'instant t_o suit l'évolution :

$$\delta V_{6\mathcal{N}}(\Gamma_o, t) = \delta V_{6\mathcal{N}}(\Gamma_o, t_o) \exp\left((t - t_o) \sum_{i=1}^{6\mathcal{N}} \lambda_i(\Gamma_o, t)\right) \quad (1.5)$$

Les $6\mathcal{N}$ λ_i forment l'ensemble des exposants de LYAPUNOV associés au point Γ_o . D'une manière générale ils dépendent de ce point, sauf si le système est ergodique. Ils peuvent être positifs, ils définissent alors les directions dilatantes ou négatifs pour les directions contractantes.

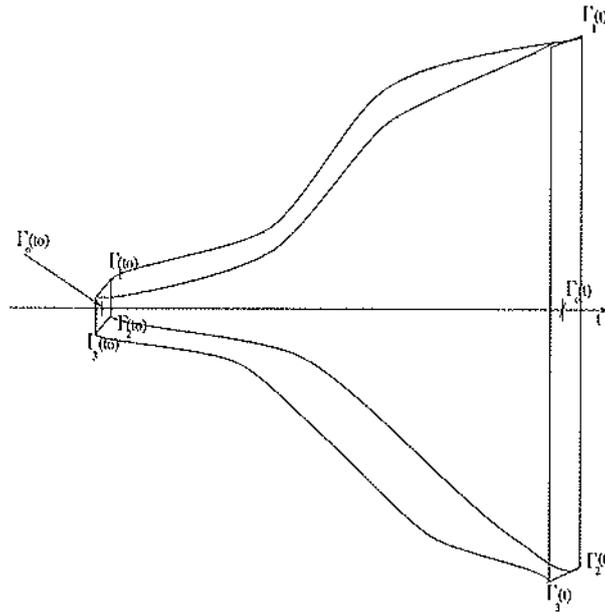


FIG. 1.1 – Extension au cours du temps de la surface de l'espace des phases, définie par les points $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ dans les deux directions d'exposant de LYAPUNOV les plus grands.

Si on appelle δN le nombre de trajectoires contenues dans le volume $\delta V_{6\mathcal{N}}(\Gamma_o, t)$ entourant Γ_o à l'instant t , alors la densité de trajectoires en ce point vaut $\rho(\Gamma_o, t) = \delta N / \delta V_{6\mathcal{N}}(\Gamma_o, t)$. L'équation d'évolution de $\rho(\Gamma_o, t)$, l'équation de LIOUVILLE en mécanique statistique, s'écrit d'après ce qui précède:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho(\Gamma_o, t) &= -\delta N / \delta V_{6\mathcal{N}}(\Gamma_o, t) \frac{d}{dt} \log(\delta V_{6\mathcal{N}}(\Gamma_o, t)) \\ &= -\rho(\Gamma_o, t) \sum_{i=1}^{6\mathcal{N}} \lambda_i(\Gamma_o, t) \end{aligned} \quad (1.6)$$

On note au passage que pour les systèmes conservatifs, pour lesquels $\frac{d}{dt} \rho(\Gamma_o, t) = 0$, on doit avoir $\sum_{i=1}^{6\mathcal{N}} \lambda_i = 0$

La mesure de SINAÏ RUELLE BOWEN (SRB).

Lorsque les volumes de l'espace des phases ne sont plus conservés au cours du temps, on doit se demander comment va évoluer le poids statistique d'un élément de volume $\delta V_{6\mathcal{N}}(\Gamma_o, t_o)$ de \mathcal{E} . Comme les longueurs d'un élément de volume évoluant dans les directions d'exposants de LYAPUNOV négatifs se contractent exponentiellement rapidement, au bout d'un temps τ grand (devant l'inverse de l'exposant de LYAPUNOV négatif le plus proche de zéro), on aura une bonne estimation du volume occupé par $\delta V_{6\mathcal{N}}(\Gamma_o, t_o + \tau)$, à la résolution de \mathcal{E} près, en ne considérant que le produit de ses directions dilatantes. Comme, de plus, la densité de probabilité de présence des

trajectoires de \mathcal{E} doit rester normée sur le volume $V_{6\mathcal{N}}(t)$, il a été proposé la mesure normalisée [5]:

$$\pi_\tau(\delta V_{6\mathcal{N}}(\Gamma_i, t_o + \tau)) = \frac{1}{\delta V_{6\mathcal{N}}(\Gamma_i, t_o + \tau)} = \frac{\exp(-\tau \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i(\Gamma_i))}{\sum_{\Gamma_i} \exp(-\tau \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i(\Gamma_i))} \quad (1.7)$$

comme mesure ergodique l'espace des phases de systèmes chaotiques.

Pour illustrer la pertinence de cette mesure, on montre figure 1.2 la modification d'un élément de volume soumis à la *transformation du boulanger dissipative* [6]. C'est l'exemple canonique des systèmes dynamiques. Il s'agit d'une transformation à dynamique discrète où, à chaque pas, on effectue l'application $(x, y) \rightarrow (x', y')$ dans le carré $[0, 1] \otimes [0, 1[$ telle que :

$$\text{pour } x < 1/2 \begin{cases} x' = 2x \\ y' = y/4 \end{cases}$$

$$\text{pour } x \geq 1/2 \begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = y/4 - 1/2 \end{cases}$$

dont on montre que la direction Ox est dilatante d'exposant $\lambda_1 = \log(2)$ et Oy est contractante avec $\lambda_2 = -\log(4)$. Cette application du boulanger est dite dissipative en ce sens que, d'après la relation (1.5) avec $\sum_{i=1}^2 \lambda_i = -\log(2)$, il y a contraction des volumes dans l'espace des phases. Au bout de seulement 3 itérations, on voit figure 1.2 que le volume initial de densité uniforme $\rho_o = 1$ est essentiellement concentré sur 2^3 lignes parallèles à Ox , dont l'épaisseur, égale à $1/4^3$, devient de l'ordre de la résolution de la figure. La densité, qui doit rester normée sur tout le carré, est donc proportionnelle à 2^{-3} sur chacune de ligne. Le poids statistique d'un élément de volume sera, après un grand nombre, n , d'itérations :

$$\pi_n(\delta V) = \frac{1}{\delta V} \propto 2^{-n}$$

$$\propto \exp(-n \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i),$$

sur les parties du carré $[0, 1] \otimes [0, 1[$ dans lesquelles l'élément de volume initial existe encore, après qu'on lui ait appliqué n fois la transformation du boulanger, i.e. sur des lignes parallèles à Ox . On remarquera que, sous cette dernière forme, la mesure ci-dessus est conforme à la loi des larges déviations, où $\sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i = h_{KS}$ est l'entropie de KOLMOGOROV-SINAI d'après la relation de PESIN pour un système fermé¹.

1.3.2 le théorème de GALLAVOTTI-COHEN.

Nous allons ici énoncer ce théorème de GALLAVOTTI-COHEN sous une forme assez générale, puis nous tenterons de l'illustrer sur le modèle le plus simple de système dissipatif que l'on puisse construire.

1. Il faut toutefois noter que les résultats de deux itérations successives ne sont pas indépendants

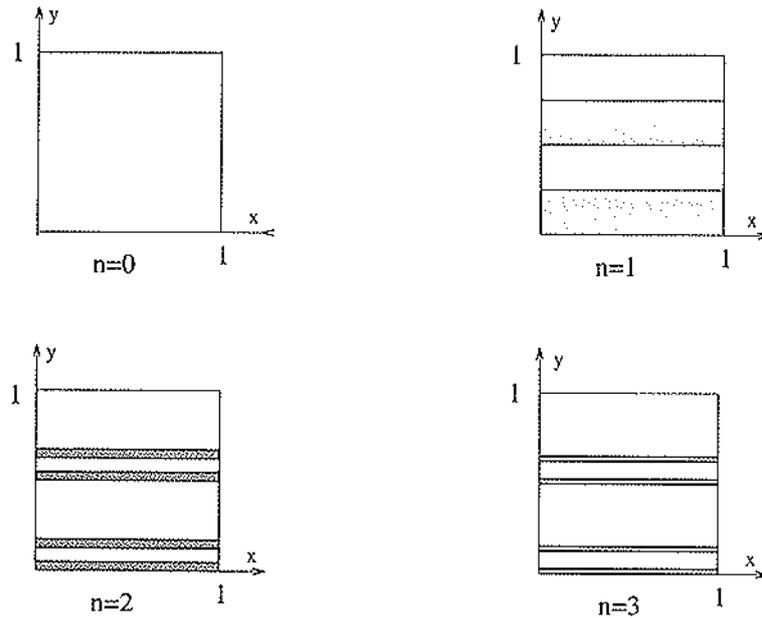


FIG. 1.2 -- Modification d'un élément de volume sous l'application du boulanger dissipative, avec n le nombre d'itérations.

Enoncé du théorème.

Ce théorème peut être démontré de façon exacte pour des systèmes possédant les trois propriétés suivantes :

- (A) Le système doit être *dissipatif*, c'est à dire qu'il possède un taux positif de contraction moyen dans l'espace des phases : $\overline{\mathcal{N}\sigma(\Gamma)} > 0$. Mais le taux de contraction instantané par trajectoire $\sigma(\Gamma)$ peut fluctuer. On notera que le taux de contraction à un instant t s'écrit

$$\mathcal{N}\sigma(\Gamma) = \frac{-1}{V_{6\mathcal{N}}(t)} \frac{dV_{6\mathcal{N}}(t)}{dt}$$

$$\mathcal{N}\sigma(\Gamma) = - \sum_{i=1}^{6\mathcal{N}} \lambda_i(\Gamma)$$

- (B) Le système doit être *réversible*, c'est à dire que les équations qui décrivent sa dynamique sont invariantes par la transformation $t \rightarrow -t$.
- (C) L'hypothèse *chaotique* peut être évoquée pour ce système. Cette hypothèse suppose qu'un système stationnaire, au sens où l'énergie interne E est rigoureusement constante i.e à chaque instant $dE/dt = 0^2$, se comporte d'un point de vue statistique d'une manière très similaire à un *système transilif d'ANOSOV*. Entre autre, pour de tels systèmes d'ANOSOV, le

2. D'une manière générale, on dit qu'un système est stationnaire lorsque puissances injectée et dissipée sont égales en moyenne, ce qui autorise des fluctuations instantanées de E avec $dE/dt = P_{inj}(t) - P_{diss}(t)$.

plan perpendiculaire à une trajectoire $\Gamma(t)$ de l'espace des phases peut être décomposé, au voisinage de cette trajectoire, seulement en une partie stable contenant les trajectoires qui convergent vers Γ et une partie instable qui contient les trajectoires s'éloignant de Γ .

Pour des systèmes répondant à la condition (C), la mesure ergodique aux temps grands, i.e la mesure π tel que

$$\lim_{T \gg t_c} \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt = \int_{\mathcal{E}} A(\Gamma) \pi(d\Gamma)$$

avec t_c un temps de décorrélation caractéristique du système, est la mesure SRB (1.7). Si on considère la variable $A_\tau(t)$ obtenue à partir d'une moyenne glissante $A(t)$ sur un temps τ . D'après l'ergodicité, la valeur particulière de $A_\tau(t)$, égale à $A_\tau(\Gamma_i^\tau)$, correspondant à la trajectoire particulière Γ_i^τ de \mathcal{E} (sur laquelle le système doit rester au moins un temps τ) s'obtient par la moyenne temporelle de $A(t)$ sur cette trajectoire :

$$A_\tau(\Gamma_i^\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau A(\Gamma_i^\tau(t')) dt',$$

et la moyenne de $A(t)$ est donnée par :

$$\bar{A} = \langle A_\tau \rangle_{\mathcal{E}} = \frac{\sum_{\Gamma^\tau} A_\tau(\Gamma^\tau) \exp\left(-\tau \sum_{\lambda_j > 0} \lambda_j(\Gamma^\tau)\right)}{\sum_{\Gamma^\tau} \exp\left(-\tau \sum_{\lambda_j > 0} \lambda_j(\Gamma^\tau)\right)},$$

où on somme sur l'ensemble des trajectoires $\{\Gamma^\tau\}$ de \mathcal{E} sur lesquelles le système reste au moins un temps τ . Intéressons nous au cas où $A(t)$ est le taux de contraction dans l'espace des phases par particules $\sigma(t)$. Si $\Gamma^\tau(+)$ est la trajectoire de \mathcal{E} sur laquelle le taux de contraction du système moyenné sur un temps τ grand (i.e tel que l'on puisse utiliser la mesure ergodique ci-dessus) prend une certaine valeur $\sigma_\tau = \sigma_\tau(\Gamma^\tau(+)) \geq 0$, alors la probabilité associée cette trajectoire est donc :

$$\pi(\Gamma^\tau(+), t) = \frac{\exp\left(-\tau \sum_{\lambda_j > 0} \lambda_j(\Gamma^\tau(+))\right)}{\sum_{\Gamma^\tau} \exp\left(-\tau \sum_{\lambda_j > 0} \lambda_j(\Gamma^\tau)\right)}.$$

Le poids statistique associé à la trajectoire $\Gamma^\tau(-)$ correspondant à la valeur de $\sigma_\tau(t)$ opposée : $\sigma_\tau(\Gamma^\tau(-)) = -\sigma_\tau \leq 0$, prend une forme équivalente, sauf qu'il faut considérer au numérateur la somme des exposants de LYAPUNOV positifs attachés à cette trajectoire $\Gamma^\tau(-)$. Or, du fait de la réversibilité, cela revient à faire la somme sur les exposants de LYAPUNOV $\lambda_j(\Gamma^\tau(+))$ inférieurs à

0³. On a donc le rapport :

$$\begin{aligned} \frac{\pi(\Gamma^\tau(+), t)}{\pi(\Gamma^\tau(-), t)} &= \exp \left(-\tau \sum_j^{6N} \lambda_j(\Gamma^\tau(+)) \right) \\ &= \exp(\tau \mathcal{N} \sigma_\tau). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Cette équation constitue le résultat principal du *Théorème de fluctuations de GALLAVOTTI-COHEN*. Elle est particulièrement intéressante car elle peut être testée expérimentalement. En effet, d'après l'ergodicité supposée de la mesure, le membre de gauche de l'égalité (1.8) est aussi le rapport de la probabilité d'avoir la variable fluctuante $\sigma_\tau(t) = \sigma_\tau$ sur celle d'avoir $\sigma_\tau(t) = -\sigma_\tau$. De plus, comme nous allons le voir sur l'exemple ci-dessous, le taux de contraction dans l'espace des phases est directement lié à la puissance injectée (ou dissipée puisqu'elles se trouvent être égales du fait de l'hypothèse chaotique). Donc avant de faire quelques remarques sur l'équation (1.8), il peut être instructif d'illustrer ce théorème sur un exemple simple construit de manière à vérifier les trois propriétés (A), (B), (C).

Exemple d'application à ensemble de particules soumis à un champ de forces extérieures.

Considérons un cas simple (proche de l'exemple considéré initialement par EVANS, COHEN et MORRIS [4]) d'un ensemble de particules de masse unité subissant entre elles des collisions élastiques et soumises à un champ de force \mathbf{F} constant et uniforme. Entre les collisions, on écrit les équations du mouvement sous la forme

$$\dot{q}_{i,k} = p_{i,k} \quad (1.9a)$$

$$\dot{p}_{i,k} = F_k - \sigma(\{p_j\}) p_{i,k}. \quad (1.9b)$$

k indiquant les trois coordonnées de la position et de la quantité de mouvement de la $i^{\text{ème}}$ particule. On introduit dans (1.9b) une *friction effective* $\sigma(\{p_i\})$ de manière à garder l'énergie cinétique

3. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \sigma_\tau &= - \sum_{\lambda_j=1}^{6N} \lambda_j(\Gamma^\tau(+)) \\ -\mathcal{N} \sigma_\tau &= \sum_{\lambda_j=1}^{6N} \lambda_j(\Gamma^\tau(+)) \\ &= \sum_{\lambda_j=1}^{6N} -\lambda_j(\Gamma^\tau(-)) \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{\lambda_j>0} \lambda_j(\Gamma^\tau(-)) = \sum_{\lambda_j<0} \lambda_j(\Gamma^\tau(+))$$

constante. Cette friction a été introduite dans les simulations numériques pour éviter que les systèmes simulés ne “chauffent” trop. On parle alors de systèmes soumis à un thermostat gaussien [3]. Pour garder cette énergie constante on doit prendre

$$\sigma(\{p_j\}) = \frac{F \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} p_i}{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} |p_i|^2}. \quad (1.10)$$

$F \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} p_i$ représente la puissance injectée par la force extérieure dans le système. Notons ce terme P_{inj} . De même par analogie avec la mécanique statistique à l'équilibre notons $\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} |p_i|^2 = 3\mathcal{N}/\beta$. On notera que les équations (1.9) sont réversibles, i.e. invariantes par la transformation

$$\begin{cases} t & \rightarrow -t \\ p_{i,k} & \rightarrow -p_{i,k}. \end{cases}$$

On satisfait donc aux hypothèses (A), (B) et on suppose (C) vrai pour ce système où $\frac{dE}{dt} = 0$

Si maintenant on réécrit l'équation de LIOUVILLE (1.4) en tenant compte des équations du mouvement (1.9) il vient l'équation,

$$\frac{d\rho(\{q_i, p_i\})}{dt} = (3\mathcal{N} - 1)\sigma(\{p_j\})\rho(\{q_i, p_i\}) \quad (1.11)$$

Or d'après l'équation (1.6) on a aussi (avec $\mathcal{N} \gg 1$)

$$3\mathcal{N}\sigma(\{p_j\}) = -\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \lambda_i(\{p_j, q_j\}) \quad (1.12)$$

ce qui montre que $\sigma(\{p_j\})$ est juste trois fois le taux de contraction dans l'espace des phases. Il est directement relié à la puissance injectée par (1.10).

On peut maintenant écrire le théorème de fluctuation pour la variable fluctuante : $\epsilon_\tau = \sigma_\tau / (\mathcal{N}\beta)$ avec :

$$\epsilon_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} P_{inj}(t') dt' \quad (1.13)$$

pour laquelle :

$$\frac{1}{\tau} \log \left[\frac{\pi(\epsilon_\tau)}{\pi(-\epsilon_\tau)} \right] = \beta \epsilon_\tau \quad (1.14)$$

où, à cause de l'ergodicité, $\pi(\epsilon_\tau)$ est à la fois

- la densité des segments de trajectoire de \mathcal{E} tels que la variable définie sur \mathcal{E} par (1.13) soit égale à la valeur ϵ_τ et
- la probabilité que le signal temporel $\epsilon_\tau(t)$ atteigne la valeur numérique ϵ_τ .

Si on connaît la trace temporelle de la puissance injectée dans un système dissipatif pour le maintenir dans un état stationnaire, alors on peut calculer $\epsilon_\tau(t)$ et vérifier la relation (1.14). Mais avant d'énumérer quelques systèmes expérimentaux sur lesquels cette étude pourrait être menée à bien, il nous faut souligner quelques points qui risquent de rendre une vérification expérimentale des relations du type (1.14) difficile.

Quelques remarques.

On doit tout d'abord noter que les hypothèses supposant le système réversible ou la stationnarité instantanée de l'énergie interne sont rarement vérifiées dans la nature. En hydrodynamique, dans les milieux granulaires ou les problèmes de frottement, la puissance dissipée est toujours positive et irréversible, alors que la puissance injectée peut prendre dans certains cas (formellement au moins) des valeurs négatives. On dit que ces systèmes sont stationnaires lorsqu'en moyenne on a égalité de la puissance injectée et dissipée. Si expérimentalement on pouvait maintenir l'énergie interne constante, on ne vérifierait sûrement pas le théorème puisque la probabilité d'avoir une puissance négative serait rigoureusement nulle. Le fait que les modèles que l'on construit avec une puissance dissipée effective satisfaisant aux conditions d'application du théorème, possèdent les mêmes propriétés statistiques que les systèmes réels n'est pas évident a priori. Il est donc particulièrement intéressant de vérifier si des systèmes physiques réels satisfont à (1.14). Cela suppose de trouver des systèmes dissipatifs expérimentaux où la puissance injectée instantanée peut être négative, avec une probabilité raisonnable, ce qui n'est pas le cas d'une manière générale.

L'autre difficulté expérimentale est de faire la part entre ce qui est dû au théorème de GALLAVOTTI-COHEN et ce qui provient des propriétés générales intrinsèques du signal mesuré. En effet, si on considère initialement un bruit temporel gaussien décorréolé, il vérifiera une relation du type (1.14) pour tous temps τ . Et ce, quelque soit l'origine de ce bruit. Mais même pour des signaux $A(t)$ de moyenne non nulle qui ne sont pas initialement gaussiens, on a vu au premier paragraphe de ce chapitre, que d'observer autour de 0 l'évolution des quantités

$$A_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} A(t') dt'$$

intergrées sur des intervalles τ de plus en plus longs, revenait à l'étude des événements rares d'une somme de variables aléatoires indépendantes. Elles suivent donc la loi des larges déviations qui peut se développer sous une forme analogue à (1.14) avec un nombre d'événements indépendants N proportionnel à τ/T_c . On peut donc trouver des signaux $A(t)$ vérifiant une relation de type (1.14) sans que ce soit une vérification du théorème de GALLAVOTTI-COHEN. Pour cela, il faut bien entendu que $A(t)$ soit lié au taux de contraction de l'espace des phases. Mais aussi, si on mesure la puissance injectée, il faut que l'on puisse donner à la pente β de (1.14) le sens précis que lui confère le théorème. Or β d'après [7] dépend du modèle.

Précisons pour finir que l'un des attraits majeurs du théorème de GALLAVOTTI-COHEN, est qu'il permet de retrouver les formules de GREEN-KUBO obtenues en théorie de la réponse linéaire dans la limite des petites perturbations [8, 9]. Si dans l'exemple précédent, la force extérieure appliquée F est petite, alors le système, peu déséquilibré, répond linéairement à cette sollicitation en créant un flux: $J_i = \alpha_{ij} F_j$. J est la moyenne d'ensemble des flux microscopiques $j_i = N \partial \sigma(\Gamma) / \partial F_i$ avec $\sigma(\Gamma)$ le taux de contraction par degré de liberté introduit précédemment. Les relations de GREEN-KUBO s'écrivent

$$\alpha_{ij} = 1/2 \int_{-\infty}^{+\infty} \langle j_i(0) j_j(t) \rangle_{\varepsilon(F)} \Big|_{F=0} dt \quad (1.15)$$

Or l'équation (1.8) peut se réécrire :

$$\langle \exp(-\tau \mathcal{N}\sigma_\tau(\mathbf{F})) \rangle_{\mathcal{E}(\mathbf{F})} = 1. \quad (1.16)$$

Dérivons successivement cette équation par F_i et F_j . Dans l'équation ainsi obtenue prenons la limite: $\mathbf{F} \rightarrow 0$, ce qui revient à y faire tendre $\sigma_\tau(\mathbf{F}) \rightarrow 0$, puisqu'on tend vers l'équilibre, et $\exp(-\tau \mathcal{N}\sigma_\tau(\mathbf{F})) \rightarrow 1$. Puis, en ne conservant que les termes du deuxième ordre en $\sigma_\tau(\mathbf{F})$ et en tenant compte des conditions aux limites de \mathcal{E} sur la mesure $\pi(d\sigma)$ lors des intégrations par partie, on obtient une égalité du type [9]:

$$\tau \left\langle \frac{\partial \sigma_\tau(\mathbf{F})}{\partial F_i} \frac{\partial \sigma_\tau(\mathbf{F})}{\partial F_j} \right\rangle \Big|_{\mathbf{F}=0} - \int_{\mathcal{E}} \frac{\partial \sigma_\tau(\mathbf{F})}{\partial F_i} \frac{\partial \pi(d\sigma_\tau)}{\partial F_j} \Big|_{\mathbf{F}=0} = 0$$

Comme la mesure tend vers celle d'équilibre invariante par translation, le premier terme de cette équation est équivalent au terme de droite de l'équation (1.15), quand on prend les limites $\mathbf{F} \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \infty$. De même, en tenant compte de la stationnarité de la mesure qui permet de sortir l'intégrale temporelle, le second terme peut se ramener à $\alpha_{ij} = J_i/F_j$ puisqu'on peut poser $\pi - \pi_o = \partial \pi / \partial F_j \Big|_{\mathbf{F}=0} F_j$, avec π_o la mesure à l'équilibre, quand on perturbe le système suivant la direction j avec une force $\mathbf{F} \rightarrow 0$ donc

$$\begin{aligned} J_i &= \langle j_i \rangle \Big|_{\mathbf{F}=0} \\ &= F_j \int_{\mathcal{E}} \frac{\partial \sigma_\tau(\mathbf{F})}{\partial F_i} \frac{\partial \pi(d\sigma_\tau)}{\partial F_j} \Big|_{\mathbf{F}=0}. \end{aligned}$$

De ce point de vue, le théorème de fluctuation de GALLAVOTTI-COHEN peut-être considéré comme une extension du théorème fluctuation-dissipation aux systèmes loin de l'équilibre.

1.4 Quels dispositifs expérimentaux pour l'étude des fluctuations de grandeurs globales?

Les écoulements turbulents confinés forment des systèmes dissipatifs hors-équilibre particulièrement propices à l'étude des grandeurs globales puisqu'en théorie, on peut facilement augmenter le nombre de degrés de liberté, en augmentant la puissance injectée par exemple. L'écoulement convectif dans la configuration de RAYLEIGH-BÉNARD et l'écoulement de VON KÁRMÁN entre deux disques contra-rotatifs, sont les deux systèmes expérimentaux que nous allons particulièrement étudier dans les deux chapitres suivants. Afin de préciser quelles sont les grandeurs globales qu'il est pertinent d'étudier, tâchons de déduire des équations du mouvement les relations qui existent entre ces grandeurs.

1.4.1 Grandeurs globales et puissance injectée en convection de RAYLEIGH-BÉNARD.

En convection de RAYLEIGH-BÉNARD, on considère un fluide entre deux plaques infinies portées à deux températures différentes, avec la température du bas supérieure à celle du haut. Dès que

le gradient de température entre les plaques est suffisant pour compenser les pertes dissipatives, le fluide se met en mouvement car cette stratification est instable, du fluide chaud plus léger se trouvant sous du fluide froid. Ce mouvement du fluide peut être bien décrit dans l'approximation de BOUSSINESQ dont le cadre est détaillé au chapitre II. Les équations du mouvement sont alors :

$$\nabla \mathbf{v} = 0 \quad (1.17a)$$

$$\rho_o [\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}] = -\nabla(p + \rho_o g z) + \rho_o g \alpha \Delta T e_z + \eta \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.17b)$$

$$\rho_o C_p [\partial_t \Delta T + \mathbf{v} \nabla \cdot \Delta T] = \lambda \nabla^2 \Delta T. \quad (1.17c)$$

avec \mathbf{v} , p , ΔT , les variables dynamiques de vitesse, de pression et de température en un point du fluide. Les quantités : ρ_o , α , η , C_p , λ qui représentent respectivement, la densité du fluide, son coefficient d'expansion thermique, sa viscosité cinématique, sa capacité calorifique et sa conductivité thermique, sont supposées constantes dans l'approximation de BOUSSINESQ.

De l'équation (1.17b), on tire une équation du type :

$$\frac{dE}{dt} = P_{inj} - P_{diss} \quad (1.18)$$

avec $E = V \langle \rho_o \mathbf{v}^2 / 2 \rangle_V$, $P_{inj} = \rho_o g \alpha V \langle \Delta T v_z \rangle_V$ et $P_{diss} = \eta V \langle (\nabla \mathbf{v})^2 \rangle_V$. Donc pour connaître P_{inj} , il faudrait pouvoir mesurer le produit $\Delta T v_z$ en de nombreux points du volume par une méthode non perturbative, ce qui semble difficile. Cependant l'équation (1.17c) s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} \nabla Q &= -\rho_o C_p \partial_t \Delta T \\ &= \nabla [\rho_o C_p \Delta T \mathbf{v} - \lambda \nabla \Delta T]. \end{aligned}$$

Or si il n'y a pas de pertes latérales du flux de chaleur Q , on a d'un point de vue statistique au moins⁴

$$\begin{aligned} \langle Q_z \rangle_V &= \langle Q_z \rangle_{S_b} = \langle Q_z \rangle_{S_h} \\ &= \rho_o C_p \langle \Delta T v_z \rangle_V - \lambda \langle \partial_z \Delta T \rangle_V. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Le flux de chaleur moyen à travers les plaques supérieures $\langle Q_z \rangle_{S_h}$ ou inférieures $\langle Q_z \rangle_{S_b}$, quant à lui, peut être estimé expérimentalement. C'est pratiquement la puissance injectée puisque le rapport de $\langle Q_z \rangle_V$ sur le dernier terme de (1.19), qui définit le nombre de NUSSELT, est en général très supérieur à un en convection turbulente⁵. De plus ce dernier terme peut également être déterminé avec une série de thermocouples placés entre les plaques du haut et du bas puisqu'il s'écrit : $\lambda \langle \partial_z \Delta T \rangle_V = \lambda (\langle T_h \rangle_{S_h} - \langle T_b \rangle_{S_b}) / d$, avec d la distance entre les plaques. On a donc

$$P_{inj} \approx g \alpha V / C_p \left[\langle Q_z \rangle_{S_b} + \frac{\lambda}{d} (\langle T_h \rangle_{S_h} - \langle T_b \rangle_{S_b}) \right].$$

Cette relation est vraie au moins pour les moyennes temporelles des variables considérées.

4. Au sens où les relations (1.19) ne sont pas nécessairement vraies à chaque instant mais où les grandeurs mises en jeux dans ces égalités ont les mêmes propriétés statistiques. Cela constitue plutôt une hypothèse qu'une affirmation.

5. Dans nos expériences, il vaut au moins 10 et peut atteindre 70.

En résumé, il sera particulièrement intéressant de mesurer le gradient de température, le flux thermique, ainsi que ses corrélations avec les fluctuations globales de température à l'intérieur de la cellule convective. Ces dernières sont faciles à obtenir sur une ligne en mesurant la résistance d'un fil de platine traversant la cellule. De plus, il sera intéressant d'étudier comment évoluent les fluctuations de ces grandeurs globales lorsqu'on augmente la turbulence, c'est à dire la différence de température aux bords. Les résultats de cette étude sont présentés au chapitre III.

1.4.2 Grandeurs globales et puissance injectée dans l'écoulement de VON KÁRMÁN.

L'écoulement de VON KÁRMÁN que nous avons étudié, est engendré dans un volume fini de fluide, par le mouvement contra-rotatif de deux disques horizontaux munis de pales. Comme on le montre dans le prochain chapitre, dans une telle configuration, l'énergie est essentiellement injectée par le travail des forces de trainée qui s'exercent sur les pales. Pour connaître la puissance injectée totale, sans passer par la puissance consommée par les moteurs pour faire tourner les disques à vitesse constante, car ils filtrent les fluctuations hautes fréquences, il faudrait pouvoir calculer la différence de pression, en tout point de toutes les pales, à tout instant. Cela n'est pas réalisable, mais par la mesure des forces de trainée en quelques points d'une pale ou sur des pales différentes, et par la recherche des corrélations qui lient ces différentes mesures sur de grandes distances, on pourra mieux comprendre le processus d'injection de l'énergie dans le fluide. C'est à l'étude des résultats de cette expérience que nous consacrons le chapitre qui suit.

Bibliographie

- [1] Landford, O.E. 1973, *Statistical Mechanics and Mathematical Problems*, Lect. Notes in Physics, vol 20, p 1. ed. A.Lenard. Springer, Berlin
- [2] Gallavotti G. and Cohen E.G.D. 1995, Phys. Rev. Lett., vol 74, n 14, p 2694.
- [3] Dorfman J.R. 1994, *From molecular chaos to dynamical chaos*, Lectures at the Institute for Theoretical Physics, University of Utrecht.
- [4] Evans D. J., Cohen E.G.D. and Morriss G.P. 1993, Phys. Rev. Lett., vol 71, n 15, p 2401.
- [5] Eckmann J.-P. and Ruelle D. 1985, Rev. Mod. Phys., vol 57, p 617
- [6] Morriss G. P. and Rondoni L., 1996, Physica A, vol 233, p 767.
- [7] Gallavotti G. and Cohen E.G.D. 1995, J. Stat. Phys., vol 80, n5/6, p 931.
- [8] Gallavotti G. 1996, Phys. Rev. Lett., vol 77, n , p 4334.
- [9] Gallavotti G. 1998, Chaos, vol 8, n 2, p 384.

Chapitre 2

Mesures locales des forces de trainée et de leurs corrélations spatiales dans l'écoulement de VON KÁRMÁN.

2.1 Introduction

Dans toutes les modélisations théoriques ou phénoménologiques de la turbulence, la puissance totale injectée dans l'écoulement, et donc la puissance totale dissipée, sont supposées constantes au cours du temps. Or, bien que peu d'études quantitatives n'existent sur le sujet, ceci ne correspond pas à l'observation expérimentale, qui montre que les fluctuations peuvent atteindre 10% de la puissance moyenne [1]. Ce résultat, à lui seul, n'invalide pas les modélisations théoriques. En effet, celles-ci supposent implicitement qu'à la limite des grands nombres de REYNOLDS, Re , le volume de l'écoulement peut-être subdivisé en un grand nombre de cellules décorréélées. Cette hypothèse n'est pas nécessairement vraie en turbulence où il semble exister des structures susceptibles de transporter de l'information sur de grandes échelles spatiales. Toutefois si un tel découpage en sous-volumes indépendants est réaliste, alors il en résulte que la puissance totale dissipée (ou injectée) doit présenter une statistique gaussienne dont l'écart type relatif à la valeur moyenne doit décroître en raison de l'inverse de la racine carrée du nombre de degrés de liberté de l'écoulement turbulent, soit $Re^{-9/8}$ [2]. C'est la validité de cette loi qui doit être testée expérimentalement.

Après avoir décrit l'écoulement de VON KÁRMÁN et le montage expérimental, nous donnerons le principe de la mesure des fluctuations de trainée à partir de mesures des pressions sur une pale. Puis nous détaillerons les résultats obtenus pour les différents régimes de l'écoulement en mettant en évidence d'éventuelles comportements en loi de puissance de l'amplitude des fluctuations.

2.2 L'écoulement de VON KÁRMÁN.

L'écoulement de VON KÁRMÁN, tel que nous l'avons étudié, est engendré par la rotation dans l'air de deux disques coaxiaux horizontaux munis de pales qui se font face (cf figure 2.1). Leur mouvement peut être : co ou contra-rotatif, dans un volume d'air confiné par une enveloppe cylindrique ou ouvert. L'écoulement engendré par un mouvement contra-rotatif est plus dissipatif, car il présente plus rapidement un état de turbulence homogène qui dissipe l'énergie très efficacement, alors que dans le cas co-rotatif, il existe de grands tourbillons reliant les disques qui s'entraînent mutuellement. Durant notre expérience nous avons contrôlé la vitesse des disques avec une précision de l'ordre du pour-cent grâce à un asservissement décrit en [3]. Dans une telle configuration l'entraînement du fluide se fait en grande partie par l'intermédiaire des pales verticales. La puissance injectée dans le fluide est fortement liée à leur nombre et à leur taille.

Comme pour une vitesse de rotation donnée, l'énergie injectée est plus grande dans le cas contra-rotatif, nous nous sommes essentiellement consacrés à l'étude de ce cas avec deux disques tournant à la même vitesse, mais ne comportant pas le même nombre de pales. Nous avons quatre pales en haut, à cause du nombre limité de capteurs que nous pouvions y placer, contre huit en bas. Cette dissymétrie, entraînant une puissance injectée par chaque disque différente, engendre une circulation globale de l'air entre ces disques différente du cas symétrique (avec le même nombre de pale en haut et en bas) puisque le disque du bas "aspire" plus de fluide. De tels mouvements moyens se superposant aux fluctuations turbulentes, sont généralement présents dans les écoulements turbulents expérimentaux. On pourra ici connaître leur influence sur nos mesures par comparaison d'études similaires faites dans le cas symétrique ou dissymétrique. En écoulement confiné, contrairement au cas ouvert, le volume de fluide mis mouvement est constant. C'est pour cette raison que nous nous sommes consacrés à l'étude de l'écoulement de VON KÁRMÁN fermé. L'effet du confinement, sur le mouvement moyen notamment, sera considéré de manière qualitative en retirant les parois latérales.

2.2.1 Principe de la mesure.

Bilan des forces s'exerçant sur la disque.

Une évaluation des couples s'appliquant sur un disque en mouvement de rotation dans un fluide conduit au bilan d'énergie :

$$\frac{I}{2} \cdot \frac{d}{dt}(\Omega^2) = P_m - P_{inj} \quad (2.1)$$

avec I le moment d'inertie du disque, Ω la vitesse angulaire, P_m la puissance du moteur permettant la rotation du disque à la fréquence Ω et P_{inj} la puissance que le disque injecte dans le fluide pour le maintenir en mouvement turbulent. Si l'asservissement de la vitesse du disque était instantané, on aurait Ω constant, et la puissance fournie au fluide serait alors exactement proportionnelle à $V \cdot I$ le produit de la tension et de l'intensité nécessaire aux bornes du moteur pour maintenir Ω constant.

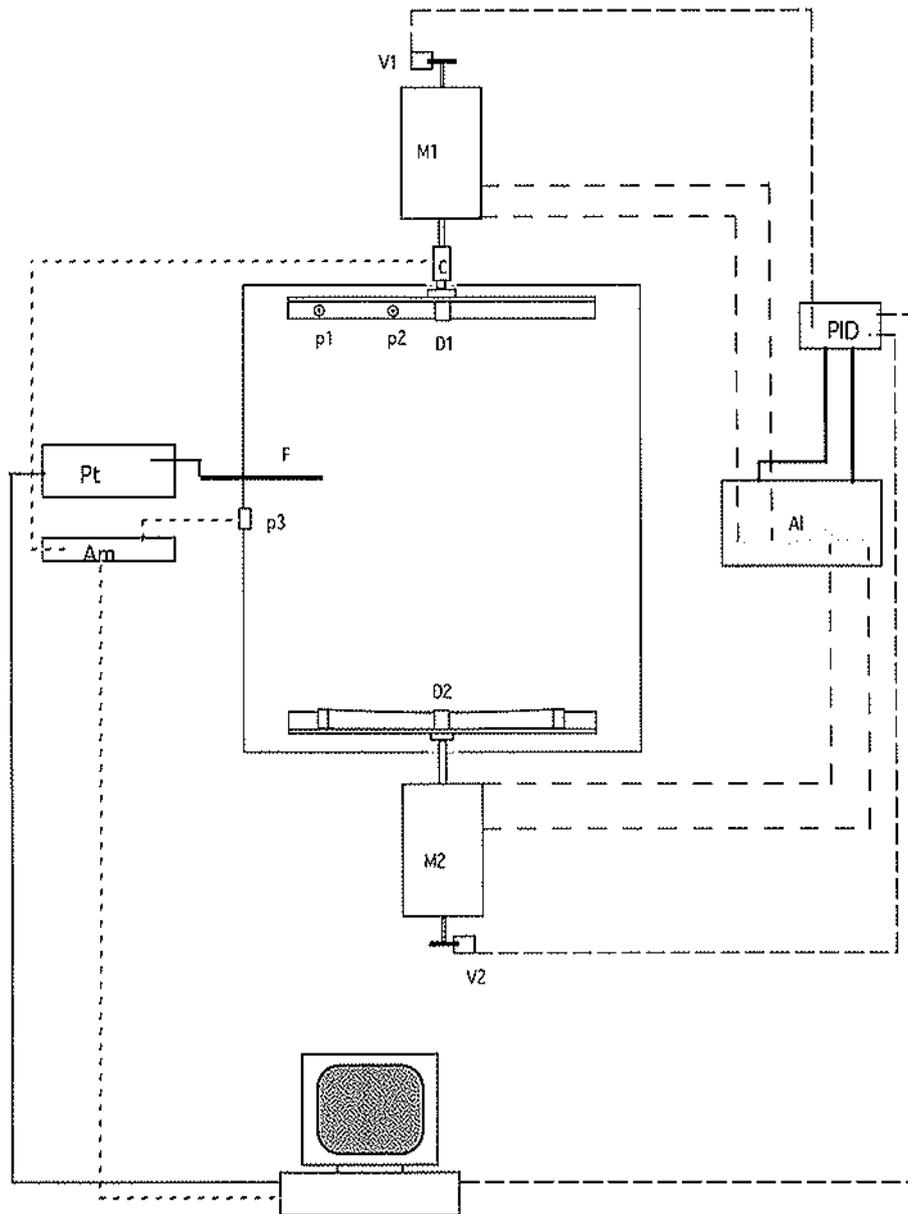


FIG. 2.1 – Schéma du dispositif d'étude de l'écoulement de VON KÁRMÁN. Les moteurs $M1$ et $M2$ mettent en mouvement les disques $D1$ et $D2$ munis de 4 et 8 pales respectivement. Leur vitesse, connue par les dispositifs optiques $V1$ et $V2$, est contrôlée par un système d'asservissement PID qui module la puissance que l'alimentation (AI) fournit aux moteurs. Les capteurs $p1$ et $p2$ et leurs vis à vis sur l'autre face sont connectés à l'amplificateur IOTTECH 488 (Am) par l'intermédiaire du contact tournant AIR PRÉCISION (C). Le fil chaud avec la sonde TSI 1260A (F) et le pont TSI MODÈLE 1750 (Pt) mesurent la norme de la vitesse au voisinage du capteur statique de pression $p3$. Toutes les acquisitions de données ainsi que le contrôle de l'asservissement se font par une carte MIO-16XL exploitée sous le logiciel LABVIEW.

En réalité, l'inertie électromécanique des moteurs effectue un filtrage de P_m . En mesurant l'intensité et la tension aux bornes du moteur on ne peut pas accéder aux fluctuations rapides (supérieures à quelques dizaines de Hertz) de la puissance fournie par le disque à l'écoulement [3]. Or le mouvement turbulent, responsable des fluctuations de cette puissance, s'effectue à des fréquences élevées. Une méthode possible pour contourner ce problème, serait de placer un accéléromètre sur la pale. En effet, du fait de l'asservissement, on peut écrire $\Omega = \Omega_o + \omega(t)$, où Ω_o est la valeur constante de la vitesse angulaire fixée par l'asservissement, et linéariser l'équation (2.1) on a alors :

$$P_{inj} = P_m - I\Omega_o \dot{\omega}(t) \quad (2.2)$$

Mais un accéléromètre placé perpendiculairement au rayon, à cause de sa trop grande sensibilité aux vibrations du dispositif, ne permet pas une mesure quantitative de $\dot{\omega}(t)$. Cependant, les estimations effectuées nous ont permis de vérifier que le terme $I\Omega_o \dot{\omega}(t)$ était, en terme de fluctuations, de quelques ordres de grandeur (100 fois) inférieur à P_m . La mesure de la puissance moteur est donc une bonne méthode pour connaître la puissance moyenne injectée dans l'écoulement et ses fluctuations basses fréquences. Mais une mesure directe de P_{inj} est indispensable si on veut résoudre les fluctuations rapides. Elle possible par la méthode proposée ci-après.

Estimation de la puissance injectée.

Une bonne estimation des fluctuations de la puissance injectée dans l'écoulement de VON KÁRMÁN peut être obtenue à partir de la mesure de la pression s'exerçant sur les pales. En effet les équations de NAVIER-STOCKES pour un fluide incompressible s'écrivent :

$$\rho(\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.3a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.3b)$$

En multipliant scalairement (2.3a) par \mathbf{v} , et en tenant compte des conditions aux bords, qui imposent une vitesse du fluide égale à celle de la paroi sur celle-ci, on obtient, en intégrant sur tout le volume, la relation suivante :

$$\frac{d}{dt} \left[\rho \int_{\mathcal{V}} v^2 dV \right] = - \int_{\partial \mathcal{V}} \left(p + \rho \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \eta \int_{\partial \mathcal{V}} v_i \sigma_{ij} n_j dS - \eta/2 \int_{\mathcal{V}} \sigma_{ij} \sigma_{ij} dV \quad (2.4)$$

Le terme de gauche représente la puissance totale. Le premier terme du membre de droite ne sera différent de zéro que sur les pales où la vitesse est perpendiculaire à la surface $\partial \mathcal{V}$ de normale \mathbf{n} qui délimite le volume \mathcal{V} du fluide. Cette vitesse vaut $\Omega \cdot r$ au point r , où Ω est la vitesse angulaire. C'est la puissance injectée par l'intermédiaire des pales. Le deuxième terme représente la puissance injectée par entraînement visqueux avec $\sigma_{ij} = \partial_i v_j + \partial_j v_i$ le tenseur symétrique des gradients de la vitesse. Sans les pales, il serait à l'origine du mouvement du fluide ; mais en présence de pales, il devient négligeable. Le dernier terme représente la puissance dissipée par la viscosité dans le volume de l'écoulement.

En mesurant en plusieurs points la différence de pression s'exerçant sur chaque face d'une pale,

on obtiendra donc une estimation correcte de la puissance injectée :

$$\tilde{P}_{inj} \approx -2\Omega S_p \sum_{i=1}^N \delta p_i \cdot R_i \quad (2.5)$$

où \tilde{P}_{inj} est une estimation à partir de $2N$ capteurs de pressions, de la puissance injectée dans l'écoulement par les pales dont la face perpendiculaire au disque à une surface S_p . Ces capteurs mesurent les différences de pressions, δp_i , entre le bord d'attaque (où v et n sont de même sens) et l'arrière de la pale (ou bord de fuite), aux différents rayons R_i où ils ont été placés. De plus, par cette méthode on aura accès aux pressions en différents points de la pale et à leurs corrélations. La principale difficulté de cette méthode est la mesure de pression sur un objet en mouvement.

2.2.2 Description du dispositif de mesure.

La géométrie de l'écoulement de VON KÁRMÁN contra-rotatif confiné est la suivante :

- deux disques de 10 cm de rayon,
- séparés d'une distance de l'ordre de leur diamètre,
- et munis de quatre ou huit pales d'une hauteur de 2cm et d'épaisseur 1 cm.

Le nombre de REYNOLDS est le rapport $Re = \frac{L\Delta U}{\nu}$ où L et ΔU sont respectivement une longueur et une vitesse caractéristiques de l'écoulement . Vu l'action essentielle des pales dans l'injection d'énergie, on peut prendre $L = N \cdot h$ avec N le nombre de pales et h leur hauteur. Comme vitesse caractéristique on peut prendre la différence de vitesse de rotation des disques : $\Delta U = 2R\Omega$ avec R le rayon du disque. Un tel nombre de REYNOLDS, $Re = \frac{2 \cdot N \cdot h \cdot R \cdot \Omega}{\nu}$, nous permettra de tenir compte du nombre de pales sur le taux de turbulence ce que ne permet pas la définition classique $Re = \frac{R^2 \Omega}{\nu}$ qui aurait, par conséquent, faussé notre comparaison entre le cas symétrique et dissymétrique.

La pression s'exerçant sur les faces des pales a été mesurée par des capteurs de pression *PCB 103A* dont la taille de la zone de mesure est de l'ordre du millimètre pour un encombrement d'un centimètre. Ces capteurs dynamiques ne permettent pas la mesure de la valeur moyenne, mais ils sont susceptibles de détecter des variations de pression de 0,15 Pascal ($1,5 \cdot 10^{-6}$ atm) jusqu'à des fréquences supérieures au kilohertz. La pale étant en mouvement, le câblage de ces capteurs doit se faire par l'intermédiaire d'un contact tournant qui permet le passage de signaux électriques à travers un axe en rotation. Dans un premier temps nous avons utilisé un contact *Air Precision T13HP* fonctionnant jusqu' à des vitesses angulaires de 60 Hz inaccessibles avec nos moteurs (limités à des fréquences de rotation inférieures de 50 Hz). Le nombre de bagues permettant le contact électrique étant seulement de douze, cela ne nous a permis que la mesure simultanée de quatres signaux de pression. La rupture mécanique de ce contact nous a amené à utiliser ensuite le modèle *Air Précision T20HP* avec 30 contacts électriques et mécaniquement plus robuste, mais limité à des vitesses de rotation inférieures à 10 Hz. L'utilisation à des fréquences plus élevées que nous en avons faite, va entraîner une usure prématurée des contacts.

Notre nombre limité de quatre capteurs de pression ne nous a permis la mesure de la différence de pression sur les deux faces de la pale qu'en deux points, c'est dire à une distance de $R_1 = 4$ cm et $R_2 = 9$ cm du centre du disque. Pour cette raison, nous avons donc dû tronquer la somme de la formule (2.5) aux deux termes correspondant à ces rayons. Ceci ne permet en toute rigueur, que la mesure des fluctuations de trainées locales et de leurs corrélations entre deux positions sur une même pale ou entre deux pales différentes. Des mesures de la pression à mi-hauteur sur la paroi latérale et de la vitesse par un fil chaud placé à quelques cm de cette paroi ont été réalisées (cf figure 2.1). Ces mesures ont permis une bonne comparaison de notre écoulement de VON KÁRMÁN avec les études précédentes.

2.3 Résultats pour le montage quatre pales-huit pales contra-rotatif en écoulement confiné.

Grâce à ce montage nous avons pu obtenir une première estimation de la puissance injectée. Nous avons eu également accès aux corrélations existant entre les pressions en ces différents points de la pale et nous avons pu estimer la contribution de chacun d'eux à la puissance. De plus, une série de mesures avec un capteur par pale nous a permis de mettre en évidence le degré de corrélation entre les différentes pales.

2.3.1 Histogrammes des fluctuations de pression et de la trainée locale

Résultats attendus: la décroissance de fluctuations gaussiennes.

Dans les théories classiques de la turbulence homogène isotrope [2], la puissance injectée aux grandes échelles L (dans notre montage, typiquement la taille des pales) est transférée aux petites échelles où elle peut être dissipée par la viscosité. Ce transfert se fait à travers les échelles intermédiaires, dites inertielles, avec un flux d'énergie par unité de masse ϵ . A ces échelles, l , où la dissipation n'intervient pas encore, seul compte la différence de vitesse moyenne v_l et la distance l elle-même. Dimensionnellement, on a $\epsilon \propto v_l^3/l$. Aux petites échelles où la viscosité doit être prise en compte, on a par contre $\epsilon \propto \nu^3/l_d^4$ avec ν la viscosité cinématique, l_d l'échelle pour laquelle le nombre de REYNOLDS de l'écoulement est d'ordre 1 et où la dissipation visqueuse est efficace. Comme on suppose qu'il n'y a pas d'accumulation d'énergie aux échelles intermédiaires, on a: $U^3/L \propto \nu^3/l_d^4$ avec U la vitesse caractéristique des grandes échelles ($L\Omega$ dans notre cas).

Si on admet que les grandeurs physiques caractéristiques de l'écoulement sont corrélées sur des distances proportionnelles à l_d , on peut subdiviser le volume total de l'écoulement en N parties indépendantes de taille $(L/l_d)^3$. D'après nos évaluations précédentes et en introduisant le nombre de REYNOLDS $Re = UL/\nu$, on a $N \propto Re^{9/4}$, soit pour notre expérience $N \sim 4.10^{11}$. Dans un système avec un si grand nombre de degrés de liberté, une grandeur globale A , obtenue par sommation sur les N événements indépendants, devrait, d'après le théorème central limite (voir

le chapitre d'introduction), présenter des statistiques gaussiennes et une décroissance du rapport $\langle \sigma_A \rangle / \langle A \rangle$ en $1/\sqrt{N} \propto Re^{-9/8}$ et ceci, quelque soit la nature physique de A . On peut penser qu'il est plus raisonnable de supposer la perte des corrélations sur l'échelle de TAYLOR λ définie par :

$$\lambda^2 = \frac{\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle}{\langle (\partial_i v_i)^2 \rangle},$$

on obtient alors $\langle \sigma_A \rangle / \langle A \rangle \propto Re^{-3/4}$.

En particulier, ce type de raisonnement semble pouvoir s'appliquer à la puissance dissipée dans le volume (le dernier terme de (2.4)) car les gradients de vitesse sont corrélés sur de petites distances. Mais la relation (2.4) montre aussi que la puissance injectée s'obtient à partir de l'intégration du produit de la pression et du rayon sur la pale. Or la pression n'est pas une grandeur locale puisqu'elle se déduit du champ des gradients de vitesse à partir d'une équation de POISSON :

$$\nabla^2 p = -\rho \partial_i v_j \partial_j v_i \quad (2.6)$$

que l'on obtient en prenant la divergence de l'équation de NAVIER et STOKES. Donc la pression en un point est une solution de l'équation (2.6) et même si les dérivées des vitesses $\partial_i v_j$ se décorrèlent sur des distances très courtes, la pression restera une variable non locale à longue dépendance. La décomposition de la première intégrale du terme de droite de l'équation (2.4) en une somme d'un grand nombre d'événements indépendants n'est pas réalisable et le théorème central limite ne peut pas s'appliquer à la puissance injectée.

Fluctuations de pression et estimation des fluctuations de la puissance injectée.

Histogrammes des mesures dynamiques de pression.

Le fait de s'intéresser spécifiquement aux fluctuations de pression sur les parois en mouvement qui engendrent un écoulement turbulent par entraînement du fluide qui l'entoure, afin d'estimer les fluctuations de l'injection d'énergie, constitue à notre connaissance, une méthode de mesure originale. Un exemple des traces temporelles des signaux obtenus est donné figure 2.2. Par la suite nous noterons

- p_1 la pression de bord d'attaque la pale, issue du capteur le plus éloigné de l'axe de rotation (à 9 cm)
- p_2 la pression en vis à vis sur le bord de fuite
- p_3 la pression à 4 cm de l'axe de rotation sur le bord d'attaque de la pale
- p_4 son vis à vis sur l'autre face.

Les histogrammes en différents points de la pale sont donnés figure 2.3 pour une vitesse angulaire de 44 Hz correspondant à un nombre de REYNOLDS de 9.10^5 . On peut tout d'abord noter le

caractère fortement non gaussien de ces fluctuations. Cette propriété des fluctuations de pression est déjà connue pour des mesures de pression à une paroi immobile [4, 5, 6]. Cependant sur une paroi immobile, les signaux présentent généralement des événements rares intenses de type basse pression, comme c'est le cas ici pour les capteurs du bord de fuite (p_2 et p_4), par contre sur les bords d'attaque (p_1 et p_3), les événements rares sont plus fréquemment des surpressions. Cela est clairement mis en évidence par le signe du facteur de dissymétrie $S(X) = \langle (X - \langle X \rangle)^3 \rangle / \sigma(X)^3$ reporté dans le TABLEAU I pour le même nombre de REYNOLDS. Sur ce tableau on a également reporté la valeur des écarts types des fluctuations de pression rapportée à sa valeur pour le signal p_1 qui fluctue le plus. Ce sont d'ailleurs les pressions du bord d'attaque qui présentent les fluctuations les plus importantes.

	p_1	p_2	p_3	p_4
$\sigma(p_i)/\sigma(p_1)$	1	0,3877	0,8197	0,6158
$S(p_i)$	0,6122	-0,5306	0,7779	-0,3295

TABLEAU I: *Ecart type et facteur de dissymétrie des quatres signaux de pression mesurés sur une pale.*

Si on rapporte nos mesures de fluctuations de pression à la pression moyenne caractéristique au point de mesure, $\rho(R_i\Omega)^2$, où $R_i = 4cm$ (resp. $9cm$) est la position du capteur sur la pale, on constate figure 2.4 que :

- relativement à cette pression caractéristique ce sont les signaux mesurés près du centre du disque qui fluctuent le plus,
- ce rapport varie de moins de 10% lorsque l'on fait varier le nombre de REYNOLDS dans la gamme qui nous est accessible.

De plus les densités de probabilité (PDF) réduites de pression en un point bord d'attaque de la pale (p_1, p_3) se superposent parfaitement figure 2.5. Sur le bord de fuite (p_2, p_4) le nombre d'événements rares détectés est légèrement plus important aux grands nombres de REYNOLDS.

Enfin, pour en conclure avec la description de ces histogrammes de pression, on peut noter que c'est la pression à l'extérieur du bord d'attaque p_1 qui fluctue le plus en valeur absolue. De plus, cette pression intervient dans la relation (2.5) multipliée par son rayon. On s'attend donc à ce que les fluctuations de \tilde{P}_{inj} soient dominées par de celles de p_1 .

Histogrammes des fluctuations de puissance injectée dans l'écoulement.

Bien que les mesures de pression précédentes soient quasi simultanées ($2.10^{-5}s$ entre chaque voie soit un décalage de 8.10^{-5} s entre p_1 et p_4), nous avons préféré faire une mesure différentielle des deux capteurs en vis à vis de manière à mesurer directement $\delta p_1 = p_3 - p_4$ au point $R_1 = 4cm$ et $\delta p_2 = p_1 - p_2$ en $R_2 = 9cm$. D'après (2.5) on obtient une estimation de la densité de

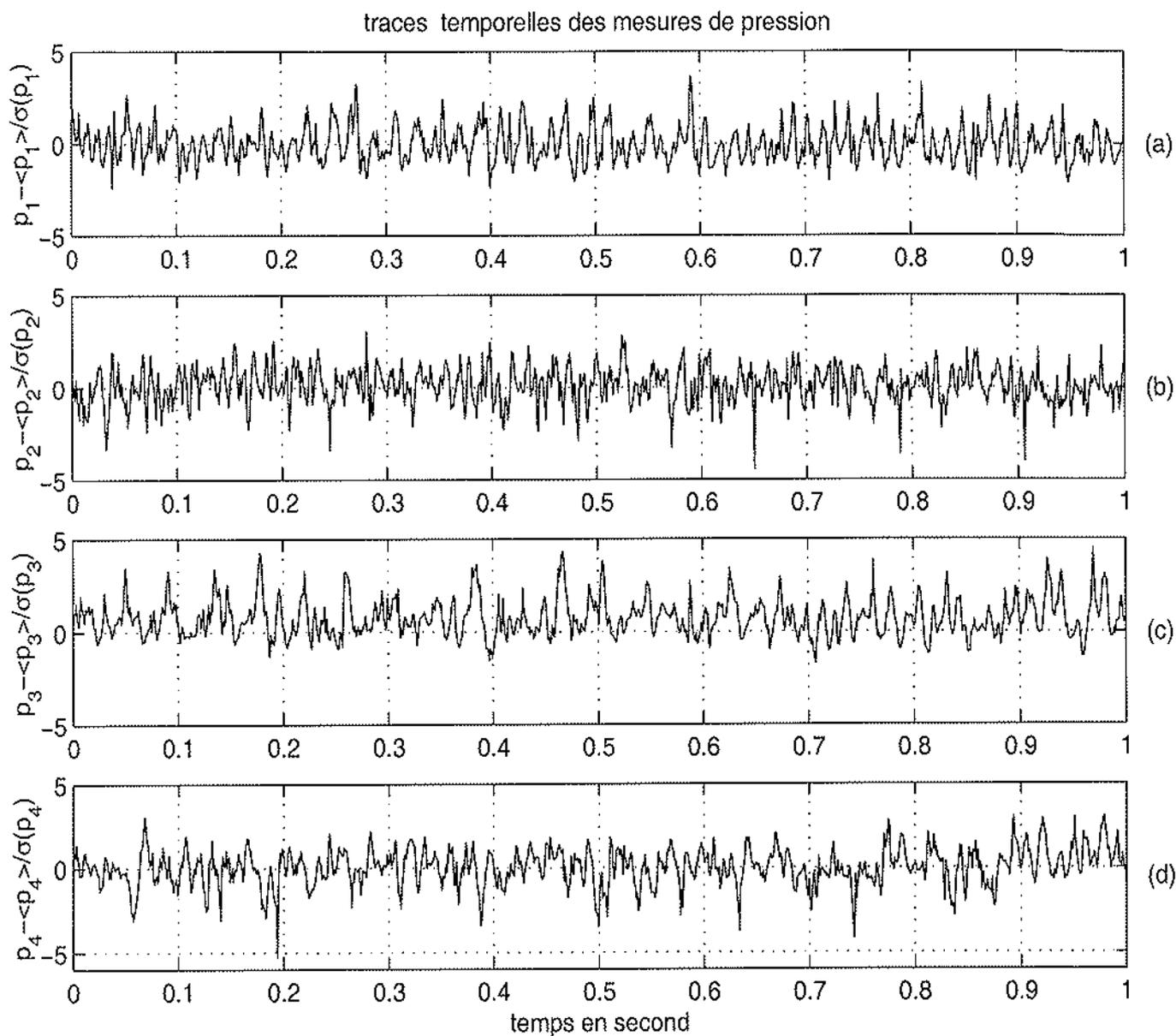


FIG. 2.2 – Traces temporelles des signaux de pression normalisés pour un REYNOLDS de 905 000. La courbe (a) représente le signal du capteur placé à un rayon de 9 cm sur le bord d'attaque de la pale (p_1). La courbe (b) représente le signal du capteur au même rayon sur l'autre face (p_2). La courbe (c) provient du capteur à 4 cm sur le bord d'attaque (p_3), la (d) venant du bord de fuite au même rayon (p_4).

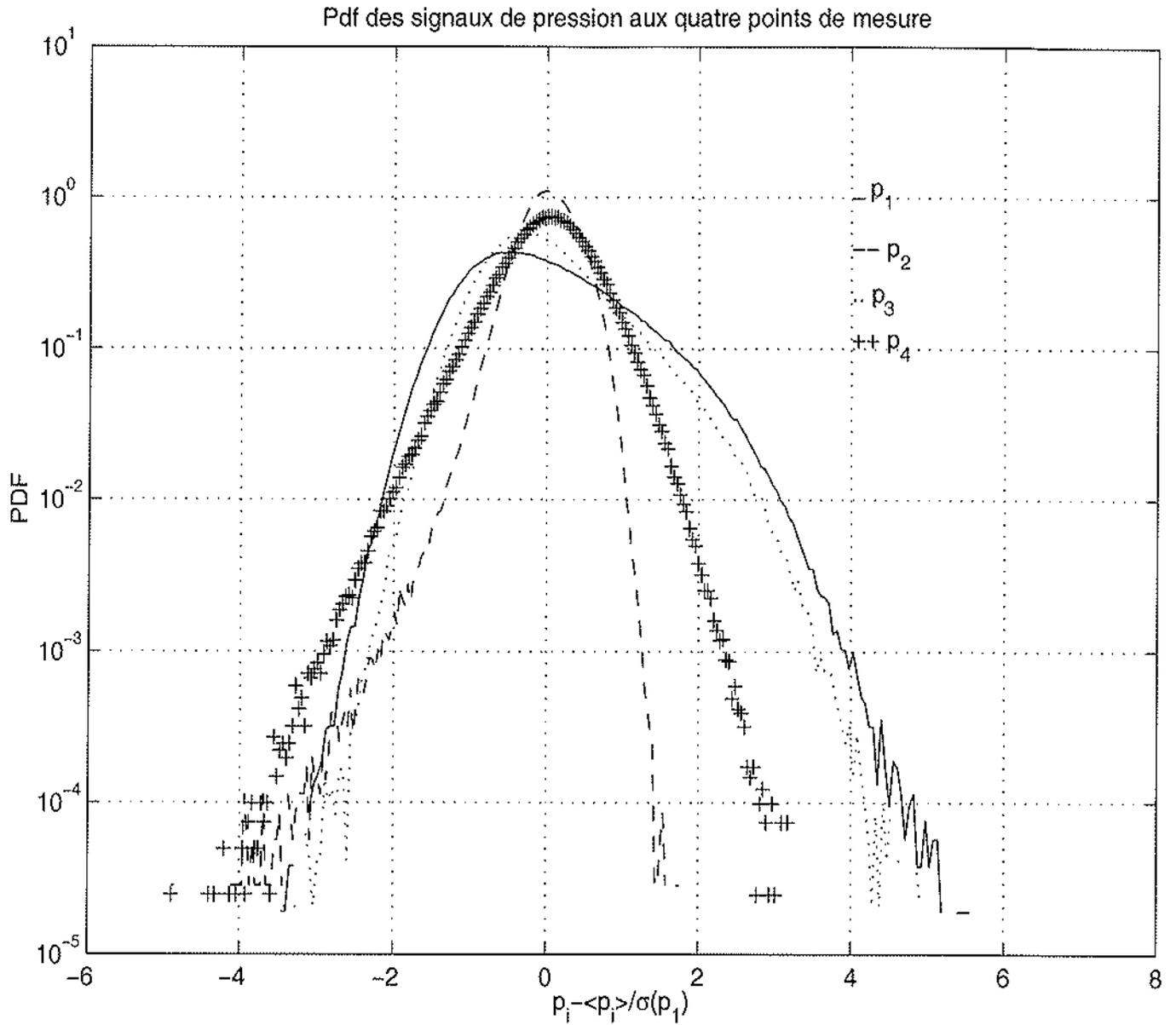


FIG. 2.3 – Fonctions de densité de probabilité (pdf) des fluctuations de pression correspondant aux signaux directs de la figure 2.2: p_1 (ligne continue), p_2 (tirets), p_3 (pointillés) et p_4 (croix). Le nombre de REYNOLDS vaut 905 000. Tous ces histogrammes sont rapportés à l'écart type de p_1 .

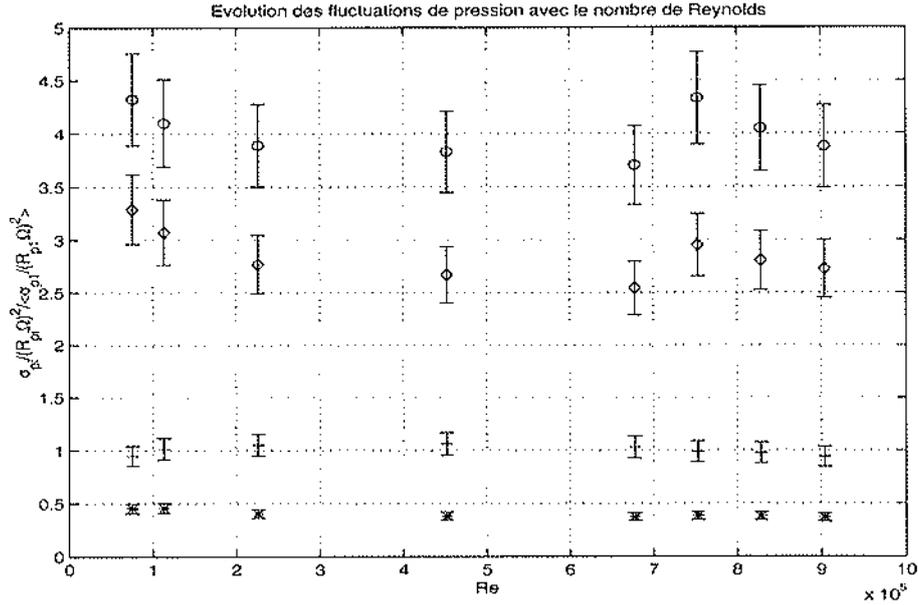


FIG. 2.4 – Evolution de l'écart type des fluctuations de pression rapporté au carré de la vitesse de la pale au point de mesure lorsqu'on augmente le nombre de REYNOLDS. Comme précédemment, les fluctuations de p_1 (+) sont prises comme références. Les autres symboles correspondent à (o) p_3 , (◇) p_4 et (*) p_2 .

probabilité des fluctuations de la puissance injectée par une pale en considérant l'histogramme de : $\tilde{P}_{inj} \propto -(9.\delta p_2 + 4.\delta p_1)$. La figure 2.6 nous montre ce signal normalisé par son écart type pour différentes fréquences de rotation des moteurs entraînant les disques, ainsi que la gaussienne centrée d'écart type unité. On notera le décalage significatif de nos histogrammes par rapport à celle-ci et la dissymétrie de toutes ces courbes, vers les faibles puissances, ainsi que la parfaite superposition de ces densités de probabilité pour les variables normalisées. Les écarts à la gaussienne peuvent se caractériser par le facteur de dissymétrie $S(\tilde{P}_{inj})$ introduit précédemment et l'applatissage $F(\tilde{P}_{inj}) = \langle (\tilde{P}_{inj} - \langle \tilde{P}_{inj} \rangle)^4 \rangle / (\sigma(\tilde{P}_{inj}))^4$, qui quantifie l'écart à la gaussienne des queues de distribution. Pour la puissance injectée, S est négatif et varie de -0,39 à -0,33, ce qui confirme bien une dissymétrie avec plus d'événements rares vers les basses valeurs. Le facteur F varie autour de 3,2. Il est donc supérieur à 3 qui est la valeur caractéristique de la gaussienne. Cela met en évidence une décroissance plus lente que la gaussienne.

Comme précédemment, rapportons \tilde{P}_{inj} à $\rho h R^4 \Omega^3$. Si le théorème central limite était applicable, on devrait avoir $\sigma(\tilde{P}_{inj}) / \Omega^3 \propto Re^{-9/8}$. Or la figure (2.7) montre que $\sigma(\tilde{P}_{inj}) / \Omega^3$ reste pratiquement constant puisque pour nos mesures, ce rapport fluctue de moins de 10% lorsque le nombre de REYNOLDS augmente. Sur les quatre derniers points, une décroissance semble s'amorcer en $Re^{-0,65}$ (valeur plus faible que celle attendue). Mais la faible gamme de nombre de REYNOLDS où on peut constater cette décroissance ne permet pas de conclure, d'autant que cette tendance reste en deça des barres d'erreur.

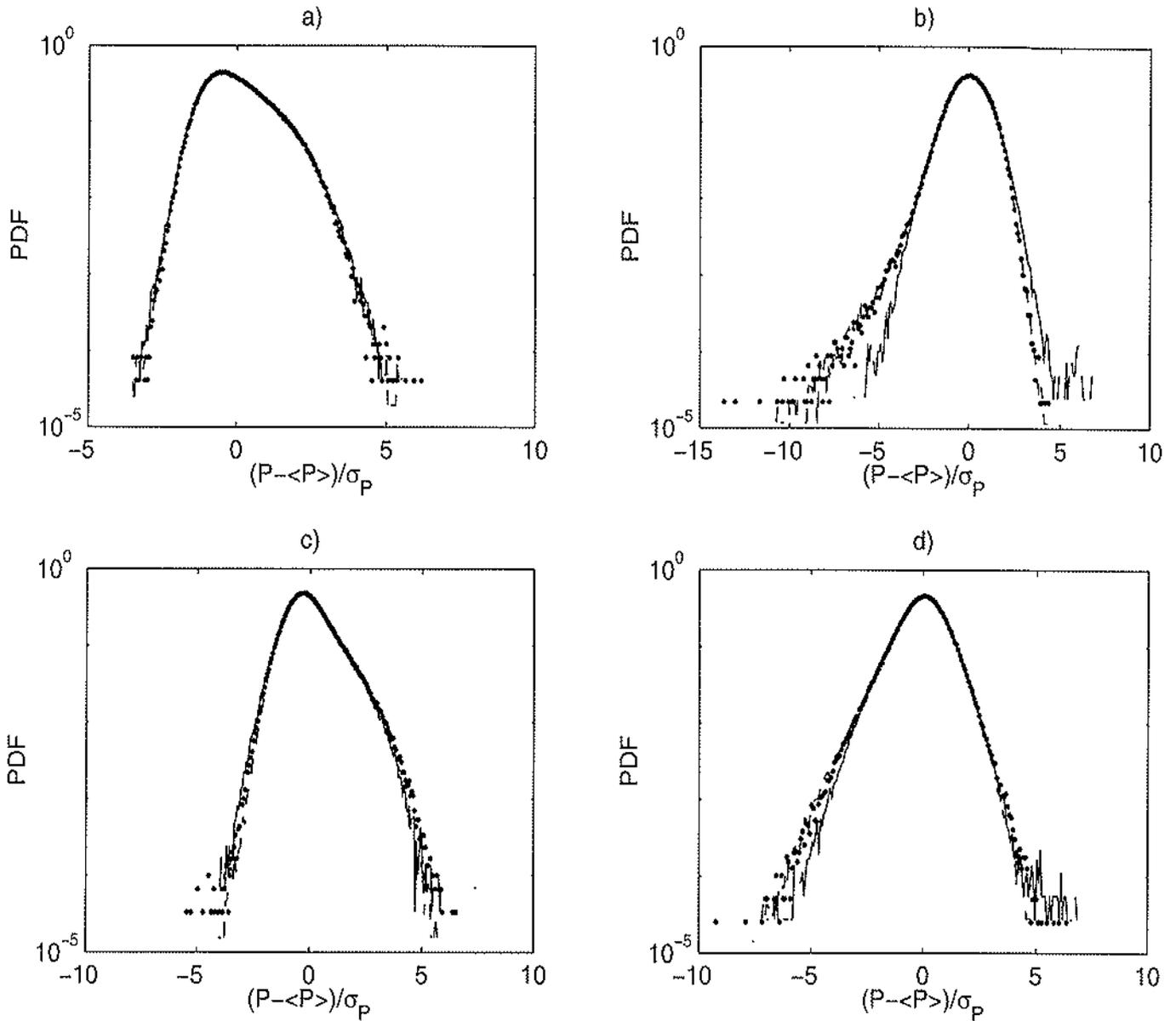


FIG. 2.5 - Superposition des histogrammes de pression aux différents points de mesure pour des REYNOLDS de 113 000 (ligne continue), 452 000 (pointillés) et 904 000 (tirets). Les densités de probabilité de a) sont obtenues avec le capteur extérieur (à un rayon de 9 cm) de la face avant de la pale, p_1 , celles de b) viennent de son vis à vis sur l'autre face (p_2), alors que c) et d) correspondent aux signaux intérieurs (4cm) de la face avant p_3 et arrière p_4 respectivement.

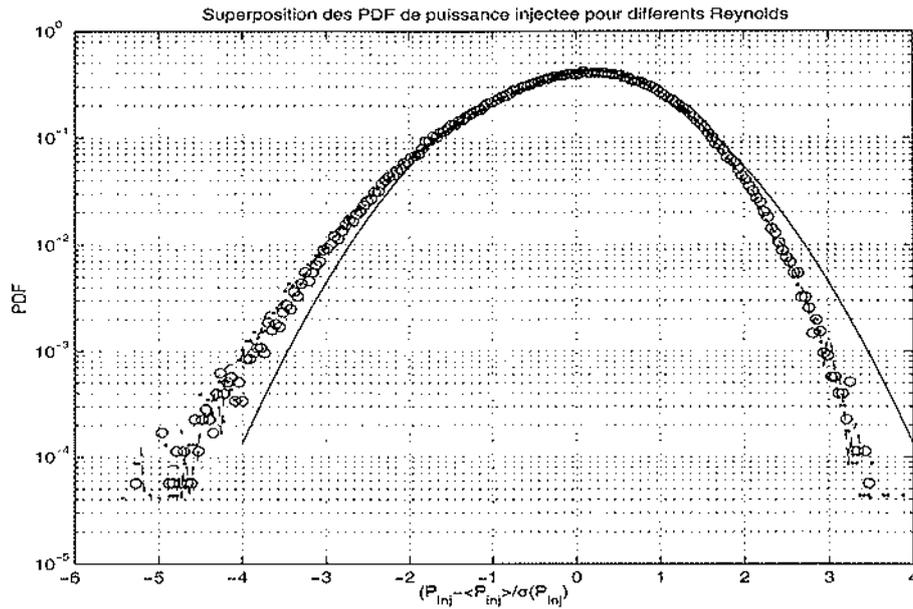


FIG. 2.6 – Superposition des distributions de probabilité des fluctuations de la puissance injectée renormalisée. Les différentes courbes correspondent à des REYNOLDS de 113 000 (\cdots), 452 000 ($-$), 905 000 ($\circ\circ\circ$). La ligne continue correspond à la gaussienne normalisée.

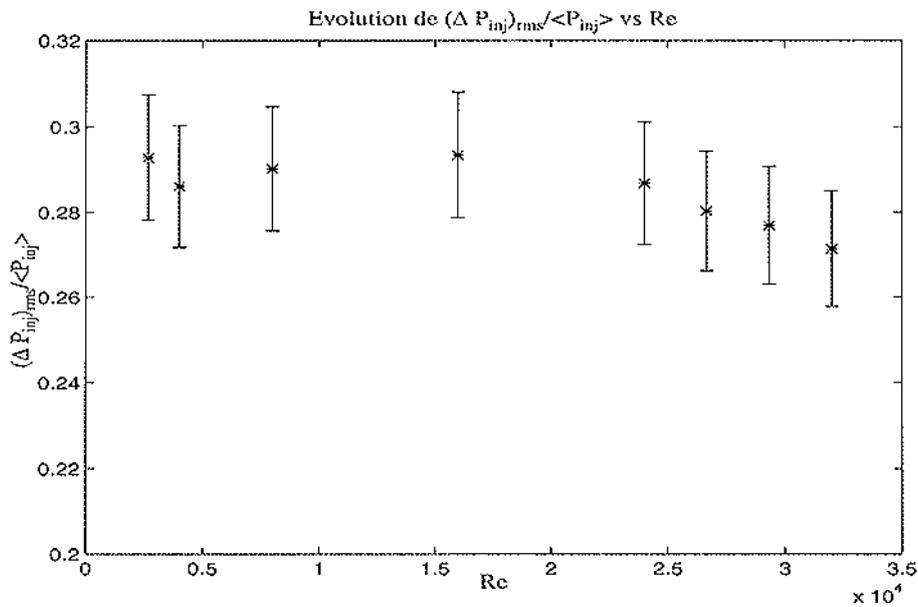


FIG. 2.7 – Evolution du rapport entre l'écart type des fluctuations de la puissance injectée et leur valeur moyenne (en unité arbitraire) en fonction du REYNOLDS $Re = 2.N.h.L\Omega/\nu$.

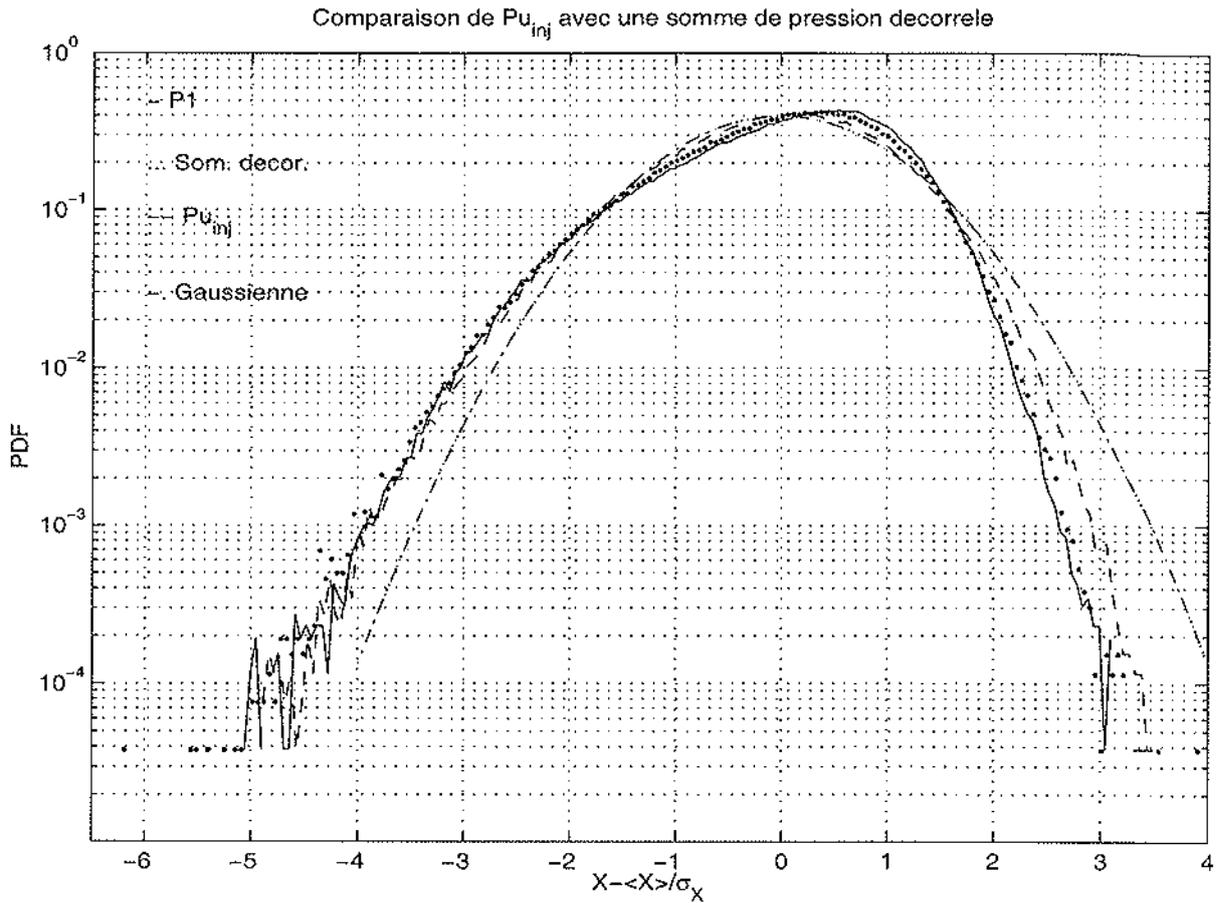


FIG. 2.8 – Comparaison de la forme des densités de probabilité des fluctuations normalisées : de la pression p_1 (—), de la somme (2.5) avec des mesures de pressions indépendantes (···) ou simultanées (---) ainsi que la gaussienne normalisée (-·-·). Le tout étant obtenu pour un écoulement de nombre REYNOLDS $5,2 \cdot 10^6$

Indépendance des mesures de pression sur une pale.

Comme attendu, la forme des PDF de la puissance injectée de la figure 2.6 est proche de celle du signal $-p_1$ (cf figure 2.5a)). Pour savoir si les légères différences observées sont juste dues à un effet de moyennisation occasionnée par la somme de signaux indépendants dans la formule (2.5), ou si les corrélations entre les mesures simultanées en différents points influencent la forme de la PDF de la puissance injectée, on peut comparer une des PDF de la figure 2.6 à la PDF du signal obtenu en sommant par la relation (2.5) des signaux de pression rendus indépendants, car venant de mesures effectuées à des temps très différents. C'est ce qui est fait figure 2.8 pour $Re = 829\,000$. Or on constate que la puissance injectée est plus proche de la gaussienne que ne l'est la courbe obtenue avec des pressions rendues indépendantes qui elle, est très proche de la PDF de $-p_1$. Ceci se retrouve si l'on regarde le facteur de dissymétrie et le facteur d'aplatissement de ces différentes

densités de probabilités (cf TABLEAU II). Cela impliquerait que les signaux de pression soient anticorrélés, c'est à dire que lorsqu'il arrive un événement de forte amplitude sur un capteur, la probabilité d'en avoir un en même temps sur l'un des autres capteurs est plus faible qu'elle ne le serait si les mesures étaient indépendantes.

	Dissymétrie	Applatissement
Gaussienne	0	3
Pression avant extérieure p_1	-0,61	3,20
Somme (2.5) avec des signaux indépendants	-0,53	3,19
Somme (2.5) avec des mesures simultanées	-0,32	3,09

TABLEAU II: *Facteurs de dissymétrie et d'aplatissement de la pression extérieure du bord d'attaque de la pale, de la somme (2.5) avec des signaux indépendants et de la puissance injectée par une pale estimée grâce aux mesures instantanées de pression.*

Cette hypothèse est confirmée par l'étude de la densité de probabilité d'un signal de pression $p_i(t)$ conditionné par la valeur du signal en un autre point au même instant $p_j(t)$. Si ces deux signaux sont indépendants, les fluctuations de p_i ne seront pas affectées par la valeur de p_j . En terme de fonction de densité de probabilité, si on appelle $\rho(p_i)$ la probabilité que la mesure en R_i fluctue entre p_i et $p_i + dp_i$, et $\rho(p_i | p_j)$ cette même probabilité sachant la pression en R_j fixée à une certaine valeur p_j . On a $\rho(p_i, p_j) = \rho(p_i | p_j) \cdot \rho(p_j)$ où $\rho(p_i, p_j)$ est la probabilité d'observer une fluctuation autour de p_i sur l'un des capteurs et en même temps une variation autour de p_j sur l'autre. Or, on a seulement $\rho(p_i, p_j) = \rho(p_i) \cdot \rho(p_j)$ pour des variables p_i et p_j indépendantes. Plus les variables seront liées plus on s'attend à des densités de probabilités conditionnelles qui diffèrent des densités libres.

Les graphes de la figure 2.9 nous montrent successivement les fonctions de densités de probabilité des fluctuations de pression :

- p_3 sachant que l'autre pression du bord d'attaque a des fluctuations (p_1) supérieures à deux fois l'écart type (puisque p_1 présente plutôt des surpressions),
- p_2 sachant que les fluctuations de son vis à vis sur le bord d'attaque p_1 sont supérieures à deux fois l'écart type,
- p_4 sachant que les fluctuations de l'autre capteur du bord de fuite (p_2) sont inférieures à deux fois l'écart type (puisque p_2 présente plutôt des dépressions),
- p_4 sachant que les fluctuations de son vis à vis sur le bord d'attaque (p_3) sont supérieures à deux fois l'écart type,

le nombre de REYNOLDS étant toujours de 5 200 000. La variable conditionnée dont la densité diffère le plus du cas non conditionné (figure 2.9a) est celle des pressions de la face avant intérieures conditionnées par l'autre capteur de la même face. En fait, comme le montre le tableau ci-dessous la probabilité d'avoir un événement rare de surpression devient plus faible. Lorsque l'on va sommer

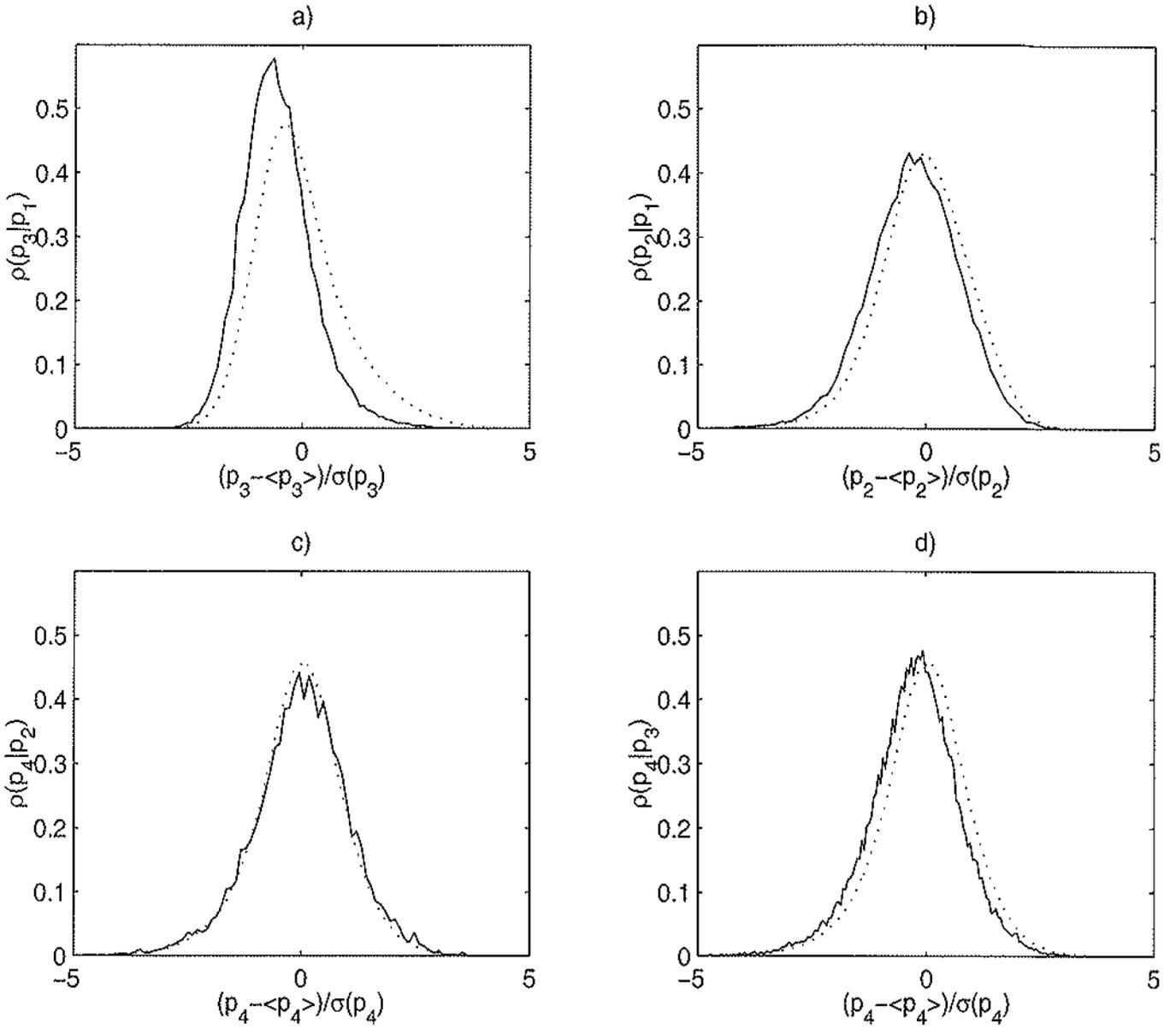


FIG. 2.9 – Représentation linéaire des densités de probabilité de mesures de pressions conditionnées (ligne continue) et non conditionnées (pointillés) renormalisées par leur écart type. Sont représentées en continue sur le graphique : a) les fluctuations de la pression intérieure avant (p_3) sachant que les fluctuations de la pression extérieure du bord d'attaque (p_1) sont supérieures à 2σ , b) les fluctuations de la pression extérieure du bord de fuite (p_2) sachant que celles de p_1 valent au moins 2σ , c) les fluctuations de la pression intérieure arrière (p_4) sachant que celles de p_2 valent au plus -2σ , d) les fluctuations de la pression p_4 sachant que celles de la pression intérieure avant (p_3) valent au moins 2σ .

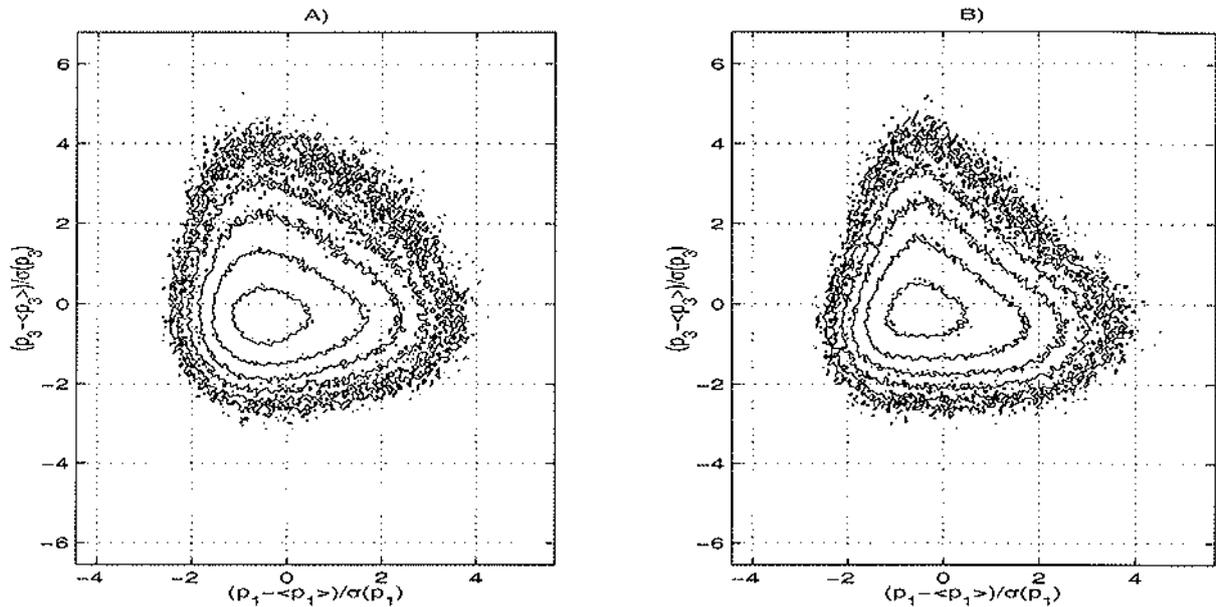


FIG. 2.10 – Logarithme des lignes de niveau de la distribution de probabilité à deux dimensions des signaux de pression issus des deux capteurs du bord d'attaque, pour un REYNOLDS de $4,610^6$. Sur la courbe A) les deux mesures sont indépendantes. Sur la B) elles sont simultanées.

ces deux signaux cela va diminuer le poids statistique des événements rares responsables des écarts à la gaussienne. Les dépressions du bord de fuite sont à l'inverse plus corrélées avec les surpressions du bord d'attaque ce qui tend à augmenter les queues de \tilde{P}_{inj} . Mais les fluctuations des pressions du bord de fuite sont initialement plus faibles. De plus comme le montre la figure 2.9 et le TABLEAU III l'effet de cette corrélation est plus faible que ne l'est celui de l'anticorrélation des pressions du bord d'attaque. Cela explique le fait que la somme (2.5) des signaux simultanés ait des fluctuations plus gaussiennes que celle des signaux indépendants.

Probabilité d'avoir	non conditionnée	sachant $p_1 > 2.\sigma$
$p_3 > 2.\sigma$	0,042	0,006
$p_2 < -2.\sigma$	0.030	0,045

TABLEAU III : Probabilité d'avoir des événements rares sur les capteurs p_3 (respectivement p_2) conditionnée ou pas par la présence d'événements rares sur l'autre capteur de la même face (resp. en vis à vis), p_1 .

Les graphes de la figure 2.10 donnent les lignes de niveau de la densité de probabilité à deux dimensions $\rho(p_1, p_3)$ pour $Re = 4\,600\,000$. Sur le contour de gauche figure 2.10A), p_1 et p_3 ont été rendus indépendants, on y a donc $\rho(p_1, p_3) = \rho(p_1)\rho(p_3)$. A droite, figure 2.10B), on a tracé les lignes de niveau de $\rho(p_1, p_3)$ pour des mesures instantanées. On y voit qu'aux grands événements de p_3 correspondent des fluctuations de p_1 plus faibles que ce qu'elles seraient si p_1 et p_3 étaient indépendants, ce qui est le signe d'une certaine anticorrélation.

Pour en conclure avec l'étude des histogrammes de pression en différents points dans cette configuration de l'écoulement de VON KÁRMÁN, on peut dire qu'ils nous ont permis de mettre en évidence les corrélations entre signaux de pression sur des distances de l'ordre du rayon. On a pu également souligner le rôle important que ces corrélations peuvent avoir sur la forme des fluctuations de la puissance injectée dans l'écoulement. Pour comprendre l'origine de ces corrélations on peut chercher s'il existe un temps de corrélation entre les pressions en différents points d'une pale, par l'étude de leur spectre croisé notamment.

2.3.2 Densité spectrale de puissance et spectres croisés des fluctuations de pression.

Prévisions sur la décroissance de la densité spectrale de puissance de la pression.

En turbulence, les lois de puissance pour la décroissance des densités spectrales de puissance sont établies à partir de l'hypothèse de turbulence gelée de TAYLOR. Celle-ci admet que les fluctuations temporelles de la vitesse ou de la pression en un point sont essentiellement dues à l'advection d'inhomogénéités spatiales par un écoulement moyen. Cela permet de relier directement la densité spectrale de puissance fréquentielle aux relations théoriques établies pour les vecteurs d'ondes. Dans notre cas, pour pouvoir appliquer cette hypothèse, il faut se placer dans le référentiel non galiléen de la pale. Les vitesses, dans l'un et l'autre de ces référentiels, sont reliées par $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{r}' \wedge \boldsymbol{\Omega}$ où les valeurs primées s'expriment dans le référentiel de la pale et la relation (2.6) devient :

$$\nabla^2 p' = -\rho[\partial_i v'_j \partial_j v'_i + \boldsymbol{\Omega}(\nabla \wedge \mathbf{v}') - \boldsymbol{\Omega}^2] \quad (2.7)$$

Par des arguments dimensionnels, on retrouve la loi de Kolmogorov 41 [7] en $|\hat{v}'(\mathbf{k})|^2 \propto \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$ pour la densité spectrale de puissance spatiale des vitesses. En faisant apparaître les transformées de Fourier dans (2.7) il vient :

$$-k^2 \hat{p}'(\mathbf{k}) = \rho[(k_i \hat{v}'_j(\mathbf{k})) \otimes (k_j \hat{v}'_i(\mathbf{k})) - \boldsymbol{\Omega} \cdot (i \cdot \mathbf{k} \wedge \hat{\mathbf{v}}'(\mathbf{k}) + \boldsymbol{\Omega}^2 \cdot \delta(\mathbf{k}))] \quad (2.8)$$

où \otimes désigne un produit de convolution. En admettant l'isotropie et l'hypothèse de TAYLOR pour les échelles concernées on s'attend à une décroissance de la densité spectrale de puissance temporelle en

$$|\hat{p}'(\nu)|^2 = \rho[A(\epsilon, \boldsymbol{\Omega})\nu^{-7/3} + B(\epsilon, \boldsymbol{\Omega})\nu^{-5/2} + O(\nu^{-11/3})] \quad (2.9)$$

Le premier terme, dû aux dérivées des vitesses, est celui que l'on a pour une mesure de la pression sur une paroi fixe. Le deuxième terme provient d'une combinaison des effets de CORIOLIS et des dérivées des vitesses. Expérimentalement, il sera difficile de différencier ces deux termes, d'exposants très proches (2,33 et 2,5), dans la décroissance du spectre.

Corrélations et densité spectrale de puissance.

Densité spectrale de puissance de la pression

Dans cette configuration contra-rotative confinée avec quatre et huit pales sur les disques, les densités spectrales de puissance des pressions sur la pale en mouvement, présentent toutes un aspect similaire à celui des figures 2.11 et 2.12 où $Re = 5,6 \cdot 10^6$. On y voit un pic étroit correspondant à la fréquence de rotation des moteurs, et une série de pics larges qui contient une grande partie de l'énergie du signal. Les derniers pics se décalent légèrement des harmoniques de la fréquence de rotation des moteurs. Ces pics ont bien une origine hydrodynamique puisque lorsqu'on change la configuration de l'écoulement (écoulement ouvert ou co-rotatif) ils disparaissent ou changent de nature.

A titre de comparaison, on a tracé également le spectre de puissance pour une pression mesurée sur la paroi verticale immobile (en pointillé). On constate qu'il n'y apparaît plus que l'harmonique quatre de la fréquence de rotation et qu'en l'absence des autres pics, la coupure du spectre se fait à des fréquences beaucoup plus basses. Il est à noter que si les spectres des deux capteurs, extérieur et intérieur, diffèrent légèrement, pour le capteur intérieur les basses fréquences sont plus bruitées ; par contre les deux en vis à vis ont des densités spectrales de puissance normalisées tout à fait identiques. A partir des histogrammes, représentatifs de l'intensité des fluctuations, on regroupait plutôt les signaux d'une même face, qui présentaient les mêmes sur ou sous-pressions. A partir des spectres, qui caractérisent l'aspect fréquentiel, on aurait tendance à rapprocher les signaux des capteurs en vis à vis.

Décroissance des spectres expérimentaux.

En effectuant des mesures à plus hautes fréquences, on peut voir figure 2.13 un changement de pente dans la partie décroissante du spectre mais aucune des deux pentes ne correspond vraiment au comportement attendu d'après l'estimation de l'équation (2.9). Par ailleurs, aux hautes fréquences (où la pente vaut 2 sur la figure 2.13), on peut craindre un changement dû à la coupure intrinsèque du capteur (qui est vendu comme fonctionnant jusqu'à 10kHz) ou du contact tournant.

Pour la figure 2.14, qui représente les exposants de la loi de décroissance des densités spectrales de puissance des différentes pressions à différent REYNOLDS, on s'est limité à une étude systématique de la partie du spectre inférieure à 1000 Hz. D'après cette figure, il semble que la pression à l'extérieur du bord d'attaque de la pale, plus sensible à la force de CORIOLIS, décroisse en $\nu^{-5/2}$, tandis que la pression avant intérieure décroisse plutôt en $\nu^{-7/3}$. Cela se constate également sur les figures 2.11 et 2.12 où la décroissance des densités spectrales est parallèle pour les signaux de pression à la paroi immobile et sur la pale près du centre du disque (figure 2.12) alors qu'elle est plus rapide sur le capteur à un rayon de 9 cm (figure 2.11). Les pressions arrière paraissent décroître avec un exposant plus faible qui n'apparaît pas dans la relation (2.9). Cependant il est difficile d'estimer avec une bonne précision la décroissance des spectres expérimentaux. C'est de là sans doute que proviennent les fluctuations observées pour un capteur donné. Une étude plus précise

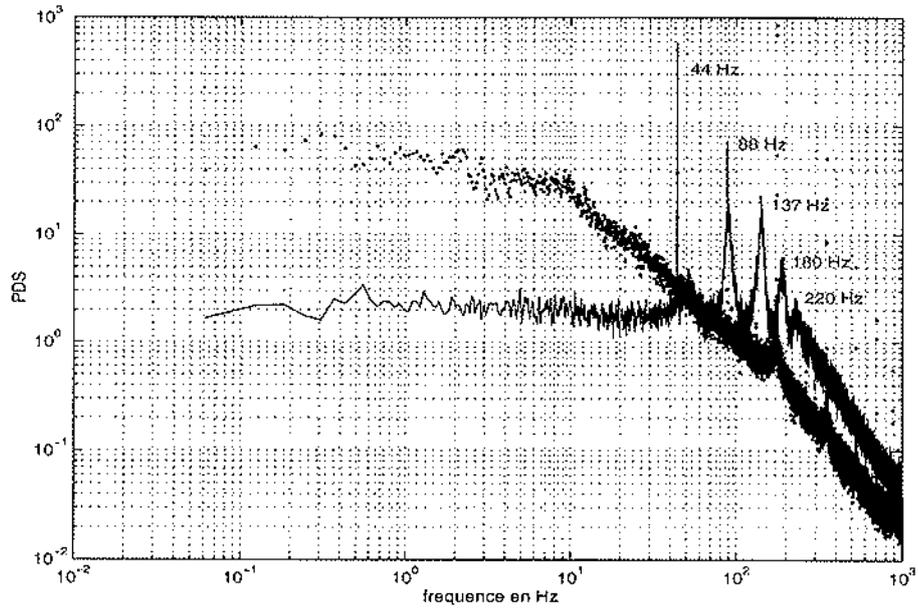


FIG. 2.11 - Densité spectrale de puissance de la pression à l'extérieur du bord d'attaque (ligne continue) et à la paroi à $Re = 905000$. Chaque chiffre repère la valeur du pic adjacent en Hz.

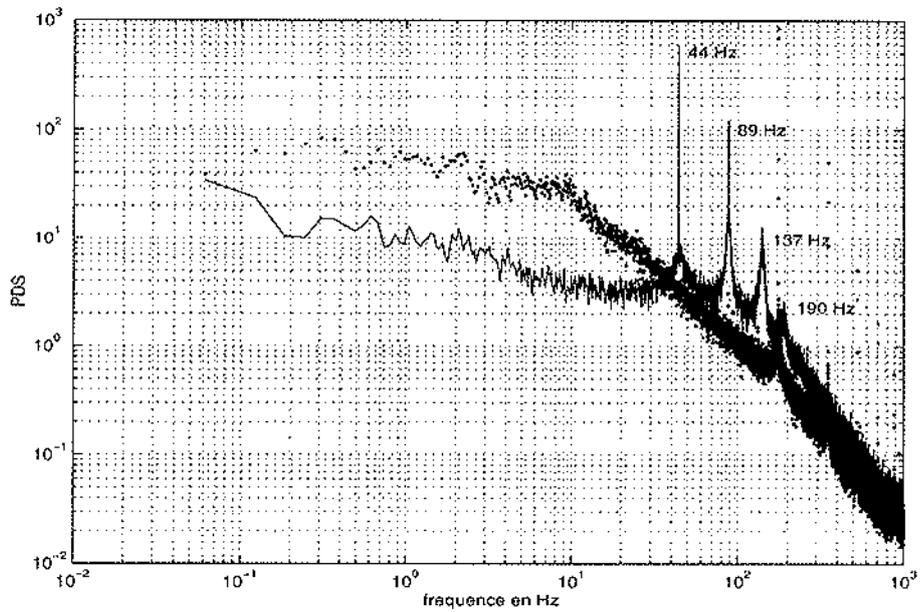


FIG. 2.12 - Densité spectrale de puissance de la pression à l'intérieur du bord d'attaque (ligne continue) et à la paroi à $Re = 905000$. Chaque chiffre repère la valeur du pic adjacent en Hz.

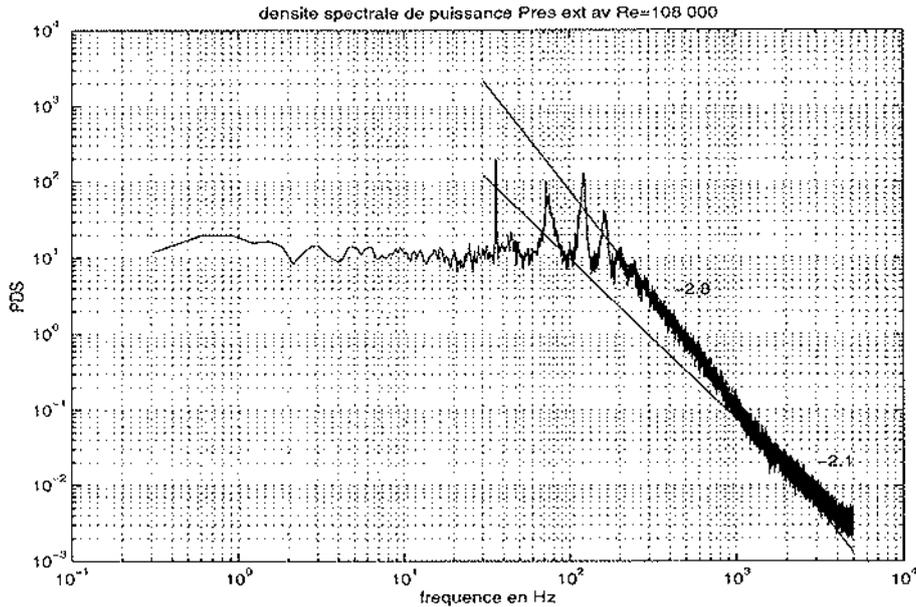


FIG. 2.13 – Densité spectrale de puissance de la mesure de la pression p_1 . L'acquisition a été faite à une fréquence d'échantillonnage de 10 000 points par seconde. On peut tirer de ce spectre deux pentes de $-2,8$ et $-2,1$ pour la décroissance à hautes fréquences.

de l'évolution de ces exposants pourrait être intéressante pour la connaissance de la gamme des échelles inertielles, mais cela sort du cadre de l'étude des échelles intégrales à laquelle nous nous consacrons. On peut simplement conclure de notre estimation préliminaire que nos observations ne sont pas en contradiction forte avec la prévision théorique.

Spectre croisé entre capteurs de pression

On a vu précédemment que les signaux des différents capteurs n'étaient pas indépendants. De plus, grâce aux spectres, on sait que les signaux mesurés présentent une certaine périodicité. Si entre deux signaux, il existe un temps de corrélation pour une structure périodique cela apparaîtra clairement sur le spectre croisé. En effet si la phase de spectre croisé $\Phi(\nu_c)$ est bien définie pour une harmonique donnée n_c de la vitesse de rotation, on peut définir un temps de corrélation

$$\tau = \Phi(\nu_c) / (2\pi n_c \Omega) \quad (2.10)$$

Pour des signaux ayant une certaine périodicité, cette méthode permet de mettre plus facilement en évidence un temps de corrélation qu'une estimation directe du maximum de la fonction de corrélation croisée temporelle entre les signaux, car cette fonction oscille beaucoup ce qui rend difficile la caractérisation de son maximum (surtout aux grandes vitesses de rotation pour lesquelles ce temps est proche du temps d'échantillonnage). Grâce aux harmoniques du signal périodique, i.e. le n_c de la relation (2.10), cette méthode permet même de déterminer des temps de corrélation de l'ordre du temps d'échantillonnage. En effet, comme on le précise ci-après, on peut toujours fixer

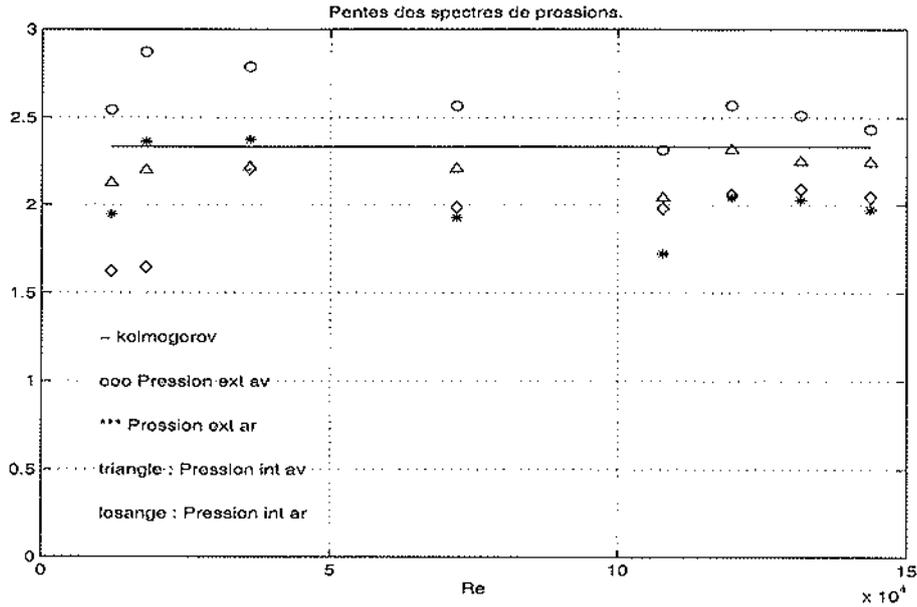


FIG. 2.14 – Evolution avec le nombre de REYNOLDS des exposants de la loi de puissance décrivant la décroissance de la densité spectrale de puissance des pressions. Pour plus de clarté, les barres d'erreur n'ont pas été représentées. L'erreur est de $\pm 0,3$ pour l'ensemble des points représentés.

ce n_c en choisissant celui qui rend maximum la probabilité d'observer des événements intenses sur l'un de nos signaux sachant qu'on a eu un de ces événements intenses sur l'autre à un instant $\tau(n_c)$ précédent.

La figure 2.15 représente le module et la phase du spectre croisé des signaux de pression du bord d'attaque, dont l'anticorrélation a été mise en évidence au paragraphe précédent. Sur le module on observe les mêmes pics que sur la densité spectrale de puissance individuelle. Pour chacun d'entre eux la phase est bien définie et vaut autour de 2 rad. Une observation plus fine de la phase autour des deux premiers pics montre que, sur la largeur du pic, on a bien une évolution linéaire de la phase puisqu'alors on a $\Phi(\nu) = 2\pi n \tau \nu$ avec τ constant sur la largeur d'un pic.

De cette façon, on peut déterminer la phase pour chaque vitesse de rotation des moteurs. Comme le montre la figure 2.16, la phase ne change pratiquement pas lorsque la vitesse angulaire de rotation des disques augmente. Autrement dit, le temps de corrélation τ entre les deux capteurs du bord d'attaque est proportionnel à $1/\Omega$. Supposons maintenant que cette corrélation soit due au passage périodique de structures advectées le long de la pale à une vitesse proportionnelle à la vitesse de rotation des disques, ces structures passeront bien alternativement sur deux capteurs distants de 5 cm après un temps $\tau \propto \Omega^{-1}$. Si de plus on admet que les surpressions observées sur les densités de probabilité sont également advectées le long de la pale, alors il est normal que les événements rares sur deux capteurs d'une même face soient anticorrélés. Donc, si ces hypothèses ne sont pas fausses, la probabilité d'avoir un événement rare à l'instant t sur un des capteurs sachant qu'il y en a eu un à un instant $t \pm \tau$ précédent (où suivant) sur l'autre capteur de la même face doit être sensiblement plus grande que la même probabilité non conditionnée.

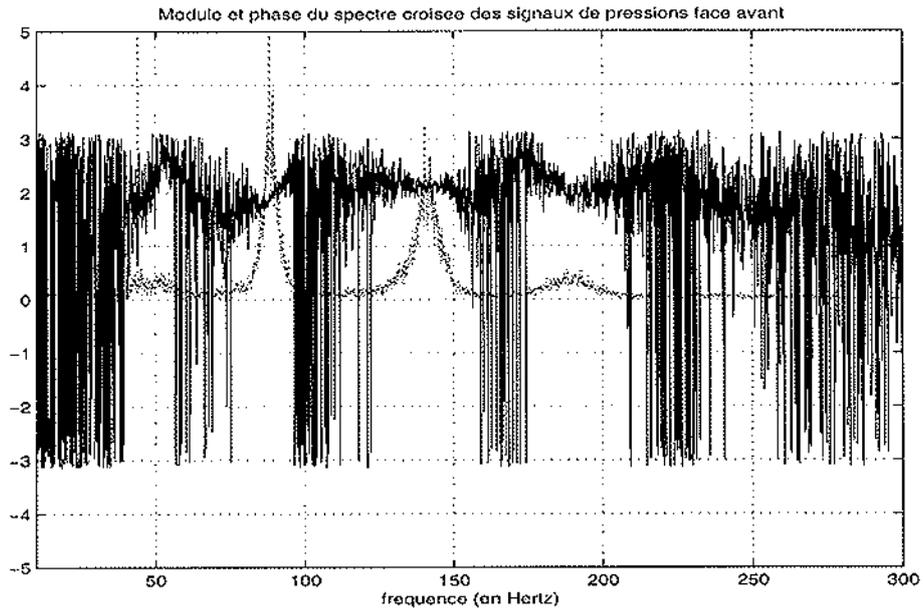


FIG. 2.15 -- Module(...) et phase (—) du spectre croisee des signaux de pression du bord d'attaque de la pale pour un nombre de REYNOLDS de 5 600 000. On a diminue l'amplitude du module de maniere à faciliter la superposition des deux courbes.

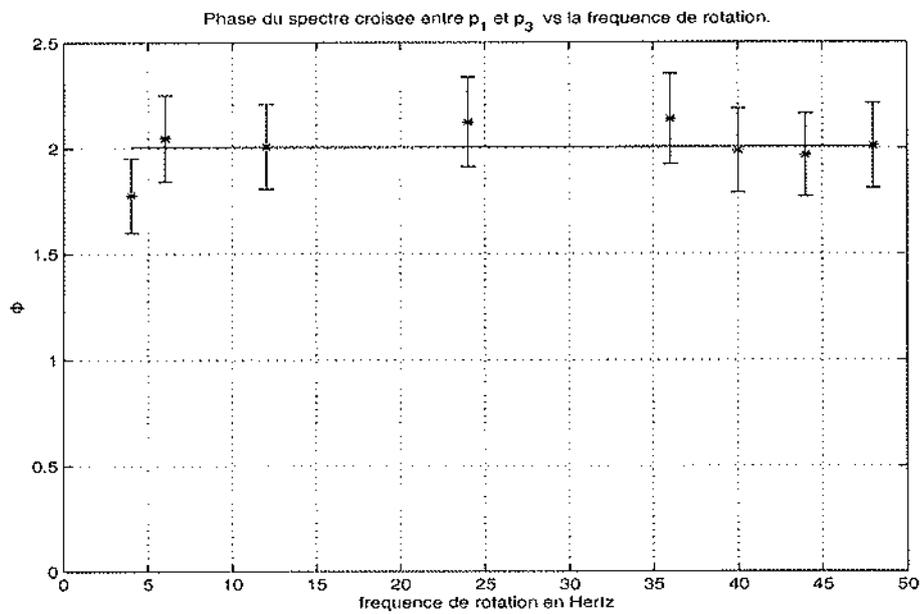


FIG. 2.16 -- Evolution de la phase Φ du spectre croisee pour différentes fréquences de rotation des moteurs Ω . La ligne continue donne la valeur moyenne.

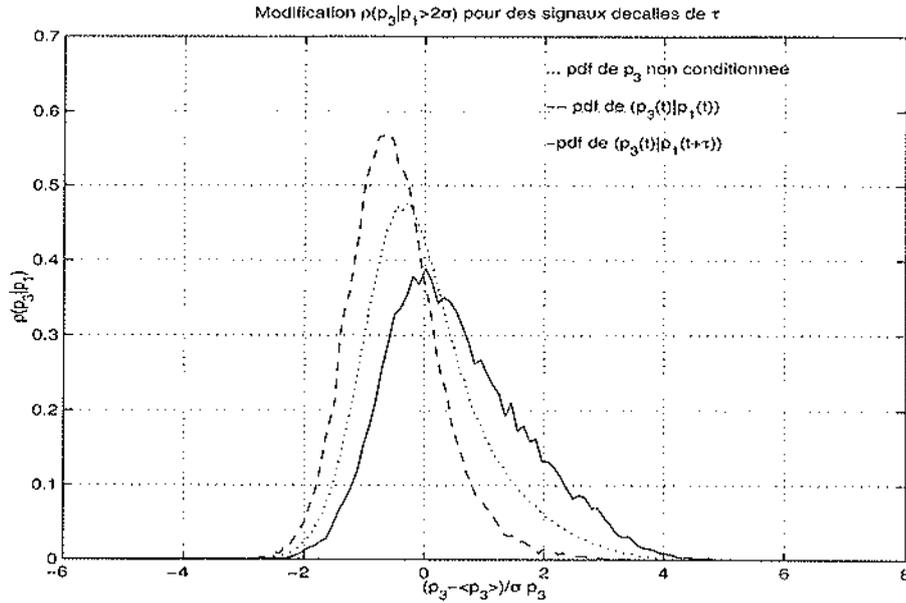


FIG. 2.17 – Comparaison des PDF de la pression, p_3 , à l'intérieur du bord d'attaque de la pale : non conditionnée (...), conditionnée par la présence d'événements supérieurs à deux fois l'écart type au même instant sur le capteur p_1 (---) et par la présence d'événements supérieurs à deux fois l'écart type mais après un temps τ (—)

C'est exactement ce que l'on observe sur la figure 2.17 où sont tracés la densité de probabilité de la pression intérieure (p_3) non conditionnée, celle conditionnée à la présence d'événements rares sur le capteur extérieur (p_1) au même instant, respectivement après un temps τ . En effet, on constate sur le TABLEAU IV que la probabilité d'avoir un événement rare sur le capteur intérieur avant est fortement augmentée (i.e multipliée par trois) par le fait qu'il y en aura un sur le capteur extérieur avant à un instant τ suivant. En fait la valeur de n_c dans l'équation (2.10) a été choisie de manière à maximiser cette probabilité. Cela conduit à une valeur du temps de corrélation faible puisque $\tau \simeq 4$ ms pour un REYNOLDS de $5,2 \cdot 10^6$.

Probabilité d'avoir	non conditionnée	sachant $p_1(t) > 2\sigma$	sachant $p_1(t + \tau) > 2\sigma$
$p_3(t) > 2\sigma$	0,042	0,006	0.122

TABLEAU IV : Probabilité d'avoir un événement rare sur le capteur du bord d'attaque le plus près du centre : non conditionnée, sachant qu'il y a eu un événement rare au même instant sur l'autre capteur de la même face, et sachant qu'il y en aura un à un instant τ ultérieur.

Les deux capteurs étant distants de 5 cm, si le temps de corrélation était dû à l'advection de structures le long de la pale, la vitesse d'advection parallèlement à la pale serait de l'ordre de 14m/s. Ce résultat est compatible avec nos fréquences de rotation. Il est aussi parfaitement en accord avec les mesures directes au fil chaud de la vitesse d'éjection autour d'un disque muni de pales [3].

Entre les autres points de mesure, on peut également établir un temps de corrélation par la méthode précédente. Les temps que l'on obtient sont compatibles avec la vitesse de rotation mais les probabilités conditionnelles, décalées ou non du temps de corrélation, montrent que ces mesures de pression sont beaucoup moins corrélées que celles du bord d'attaque.

Corrélation des fluctuations de pression sur deux pales différentes.

On peut effectuer le travail précédent avec les fluctuations de pression issues de capteurs placés au bout de deux pales qui se succèdent. Ainsi intéressons-nous aux corrélations entre les pressions du bord d'attaque sur ces deux pales ou entre le bord d'attaque sur l'une et le bord de fuite de la précédente. Les résultats sont consignés dans le TABLEAUX V pour des pressions mesurées à l'extérieur du bord d'attaque sur deux pales successives à deux nombres de REYNOLDS. La pression sur la pale qui arrive en second dans le sens de rotation est repérée par un exposant s .

	$\max(C_{p_1^s, p_1}(\tau))$	τ_c (ms)	$\rho(p_1^s)$ n.c.	$\rho(p_1^s(t) p_1(t) > 2\sigma)$	$\rho(p_1^s(t) p_1(t - \tau_c) > 2\sigma)$
$Re = 6,8.10^6$	0,52	13	0,041	0,026	0,187
$Re = 11.10^6$	0,49	8	0,041	0,026	0,174

TABLEAU V : Corrélation entre le bord d'attaque de deux pales successives pour deux nombres de REYNOLDS différents. Sont reportés : la valeur du maximum de la fonction de corrélation croisée $C_{p_1^s, p_1}(\tau)$ et le temps τ_c correspondant, la probabilité d'avoir un événement supérieur à deux fois l'écart type non conditionnée (n.c.), conditionnée par la présence d'événements supérieurs à deux fois l'écart type sur la pale précédente au même instant ou à un instant τ_c antérieur.

On constate sur ce tableau que le maximum de la fonction de corrélation croisée normalisée $C_{p_1^s, p_1}(\tau)$ est important (50 %) et se produit à des temps τ_c qui correspondent à la rotation de la pale d'un quart de tour, i.e le temps nécessaire pour que les deux pales qui se succèdent passent en un même point dans le référentiel immobile. Cette forte corrélation se retrouve également sur les événements rares dont la probabilité d'observation est fortement augmentée (multipliée par 4) lorsqu'on conditionne cette observation à la présence d'événements intenses sur la pale précédente à un instant τ_c antérieur (cf TABLEAU V et figure 2.18). Autrement dit, peut-être à cause d'une dissymétrie du montage ou d'un défaut sur la paroi latérale, le même type d'événements arrive, sur chaque pale, en un même endroit du montage.

Les corrélations entre le capteur sur le bord de fuite et celui sur le bord d'attaque de la pale suivante, sont plus faibles que celles entre bords d'attaque. Le maximum de la fonction de corrélation croisée ne vaut plus qu'un quart. De plus, la probabilité des événements rares sur le bord d'attaque n'est que peu modifiée par la présence d'événements rares de dépression sur le bord de fuite précédent au même instant ou à un instant décalé de τ_c .

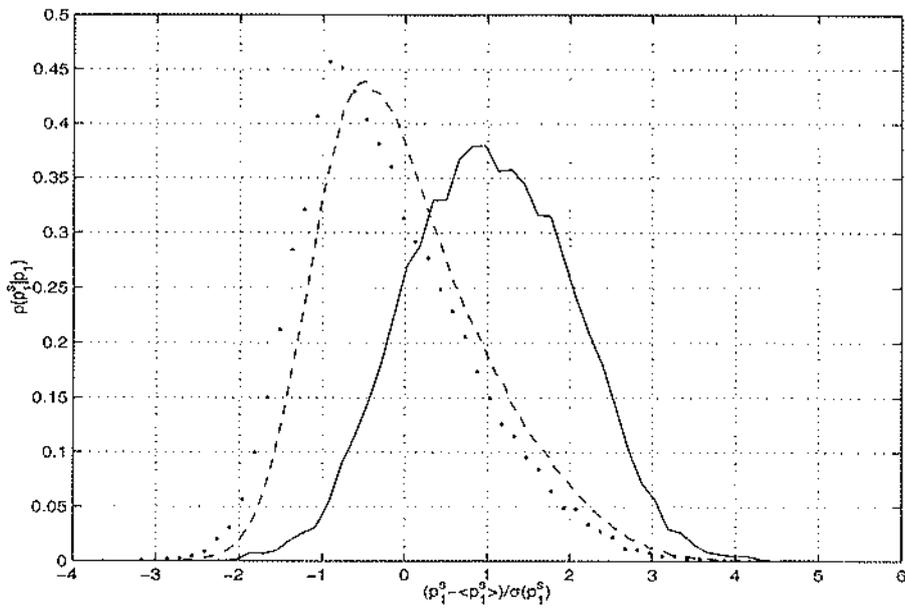


FIG. 2.18 – Comparaison des PDF de la pression, p_1^s , à l'extérieur du bord d'attaque de la pale : non conditionnée (---), conditionnée par la présence d'événements supérieurs à deux fois l'écart type au même instant sur le capteur p_1 (···) de la pale précédente et conditionnée par la présence d'événements supérieurs à deux fois l'écart type à un temps $\tau_c = 8$ ms antérieur sur la pale précédente (—). Le nombre de REYNOLDS est égal à $4 \cdot 10^6$

Distribution des temps d'attente entre les fluctuations supérieures à deux fois l'écart type.

Pour finir, rappelons que ce sont les événements rares de pression qui influencent le plus les écarts au théorème central limite dans la relation (2.5). De plus, on a vu, grâce aux probabilités conditionnées, que les structures responsables de ces événements semblent advectées le long de la pale à une vitesse proportionnelle à la vitesse d'éjection. Par contre, on n'a pas encore mis en évidence l'existence de lien entre la structure périodique du signal et la fréquence d'apparition de ces événements de forte intensité. Pour ce faire, on peut s'intéresser à la distribution des temps d'attente ΔT entre les événements au moins deux fois plus grands que l'écart type. Pour un processus aléatoire, cette distribution sera une loi exponentielle de POISSON :

$$\gamma \exp(-\gamma \Delta T)$$

avec γ la probabilité moyenne par unité de temps d'apparition du phénomène. Or on voit figure 2.19 que la distribution des temps d'attente est proche d'une exponentielle avec une décroissance caractéristique de $\gamma = 28,7s^{-1}$, très proche de la fréquence de rotation des disques (30 Hz sur pour la figure), surtout si on tient compte du fait qu'on a peu de statistiques sur les événements rares. On n'a donc pas une très bonne précision sur γ . Cependant, ce résultat semble vrai pour toutes les vitesses de rotation auxquelles nous avons pu accéder (cf TABLEAU VI) . Les fluctuations supérieures à deux fois l'écart type ont une fréquence d'apparition qui croît linéairement avec la fréquence de rotation. Cette fréquence caractéristique est même pratiquement égale à Ω . Notons qu'il faudrait un nombre de statistique énorme pour confirmer sérieusement cette linéarité sur des événements plus intenses (supérieures à quatre où cinq fois l'écart type) donc moins fréquents.

fréquence de rotation (Hz)	4	6	12	24	30	36	40	44
$\gamma(s^{-1})$	5,5	7,5	15,6	27,4	28,7	33,1	44,2	48,9

TABLEAU VI : Probabilité moyenne par unité de temps d'apparition d'événements supérieurs à deux fois l'écart type pour différentes fréquences de rotation des disques.

2.4 Quelques résultats qualitatifs dans d'autres configurations de l'écoulement de VON KÁRMÁN.

Dans la configuration étudiée précédemment, on a mis en évidence les corrélations des mesures de pression en différents points de la pale et entre deux pales successives et l'influence que cela a sur la puissance injectée par une pale. Mais, ces corrélations de pression doivent dépendre de la structure de l'écoulement, il va donc être intéressant d'observer au moins de manière qualitative comment elles sont modifiées quand on change l'écoulement. C'est ce à quoi nous allons nous attacher par la suite.

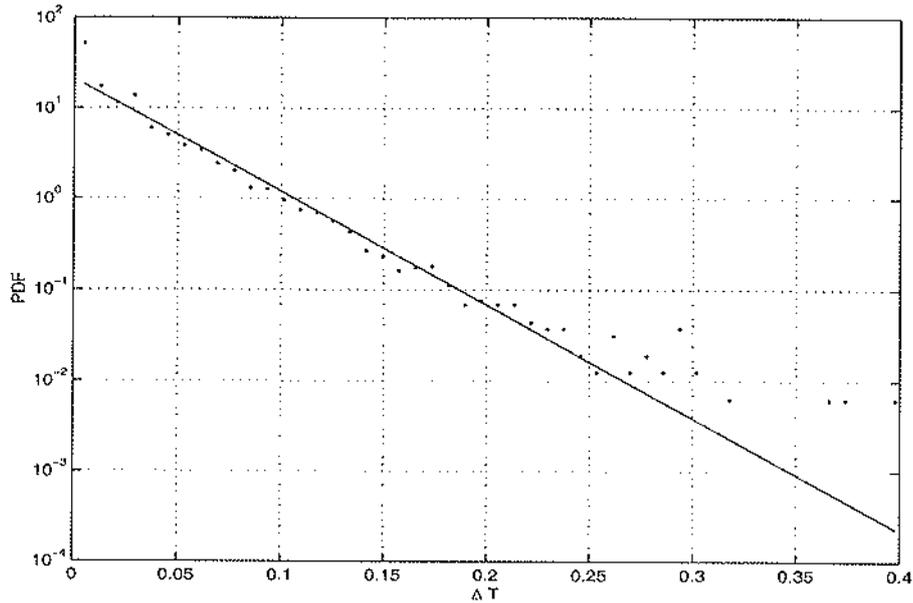


FIG. 2.19 – Distribution des temps d'attente entre des fluctuations supérieures à deux fois l'écart type de la pression extérieure du bord d'attaque, pour un fréquence de rotation de 30 Hz ($Re = 4.10^6$).

2.4.1 Ecoulement contra-rotatif confiné quatre pales-quatre pales.

Cette configuration, plus symétrique puisque chaque disque injecte une même quantité d'énergie dans l'écoulement, est la plus communément étudiée. La comparaison des spectres de la trainée en bout de pale, figure 2.20, montre des différences significatives avec le cas précédent. Ici, seul un pic, quatre fois supérieur à la vitesse de rotation, ressort nettement du spectre. Ce caractère moins oscillant modifie également les PDF des fluctuations des mesures de trainée, dont on notera l'aspect plus symétrique figure 2.21. Cependant, il existe toujours une corrélation entre les trainées mesurées sur une même pale, mais celle-ci est ici maximum pour des temps beaucoup plus courts que précédemment. En fait, ce temps (1,2 ms) est juste supérieur à notre temps d'échantillonnage (2500 points par seconde). On a toujours également une grande corrélation entre les événements rares négatifs (puisque le facteur de dissymétrie est négatif) des mesures locales de la trainée en différents points de la pale. Ces résultats sont répertoriés dans le TABLEAU VII.

Sur ce tableau, on a aussi noté les corrélations entre les pressions mesurées sur le bord d'attaque de deux pales successives. On y voit que, même si le maximum de la fonction de corrélation croisée est moins grand que dans la configuration précédente (0,27 au lieu de 0,5), la probabilité d'événements rares sur le deuxième pale est là aussi fortement augmentée (multipliée par 3) si on la conditionne à la présence d'événements de surpression sur la pale précédente à un instant τ_2 antérieur. Ce temps correspond là encore, au temps nécessaire au disque pour faire un quart de

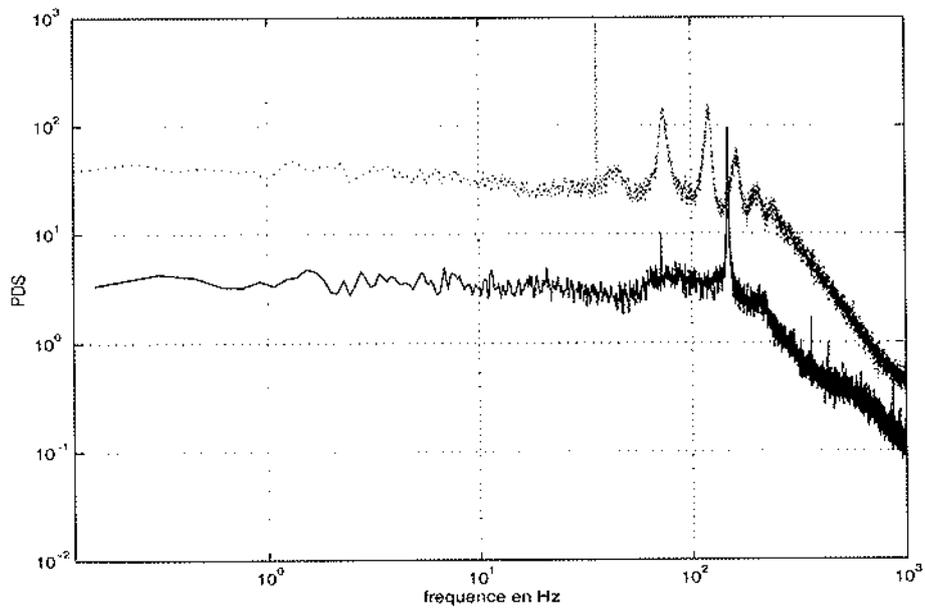


FIG. 2.20 -- Densité spectrale de puissance des fluctuations de la force de traînée s'exerçant sur la pale à un rayon de 9 cm. Le spectre en ligne continue correspond à la configuration symétrique quatre pales-quatre pales pour des disques en rotation à 36 Hz ($Re=3\ 200\ 000$). Le pic principal est à fréquence de 144 Hz. Le spectre en pointillé correspond à la configuration précédente pour une même fréquence de rotation des disques. Le décalage vertical entre les deux courbes est arbitraire. Il est là pour faciliter leur comparaison.

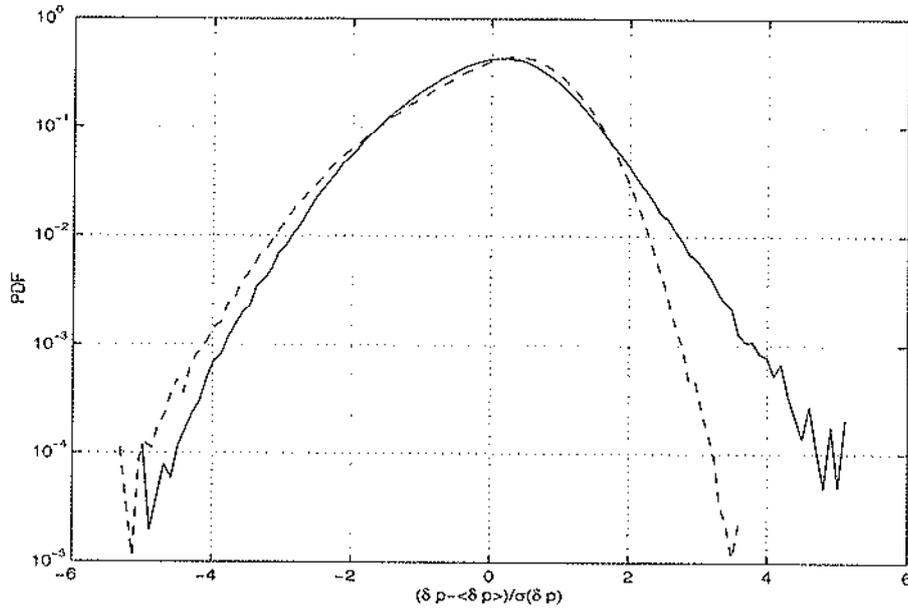


FIG. 2.21 ~ Fonctions de densité de probabilité des fluctuations de trainée normalisées par l'écart type, en configuration quatre pales par disque (ligne continue) et en configuration quatre pales-huit pales (tirets).

tour.

	$\max(C_{ij}(\tau))$	τ_c (ms)	$\rho(p_1^i)$ n.c.	$\rho(p_1^i(t) p_1(t))$	$\rho(p_1^i(t) p_1(t - \tau_c))$
Corrélation de la trainée sur une pale	0,22	1,2	0,0265	0,091	0,165
Corrélation entre pression du bord d'attaque de deux pales successives	0,27	7,2	0,035	0,028	0,111

TABLEAU VII: Corrélation des mesures de trainée sur une pale et des mesures de pression du bord d'attaque de deux pales successives pour un nombre de REYNOLDS de $3,2 \cdot 10^6$. Sont donnés sur la première ligne (respectivement sur la deuxième ligne): le maximum de la fonction de corrélation croisée, le temps de corrélation maximum τ_c , la probabilité d'événements inférieurs (resp. supérieurs) à deux fois l'écart type non conditionnée, conditionnée par la présence d'événements du même type sur l'autre capteur au même instant ou à un instant τ_c antérieur, pour la trainée sur une pale (resp. pour la pression sur le bord d'attaque de deux pales successives).

Des problèmes de bruit au niveau des contacts tournants nous ont empêchés de faire, comme précédemment, une étude systématique en fonction de la vitesse de rotation. Cependant les mesures que nous avons effectuées, nous ont permis d'observer quelques différences avec le cas dissymétrique. La différence principale vient de la corrélation quasi instantanée des événements de surpression sur

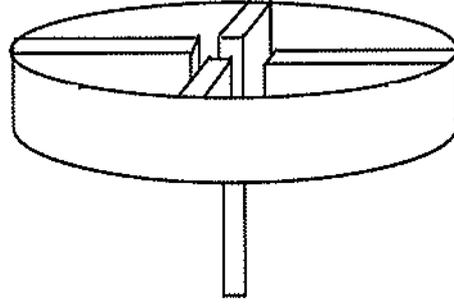


FIG. 2.22 -- schéma des disques munis de pales et de jupes utilisés en écoulement de VON KÁRMÁN ouvert.

le bord d'attaque de la pale. En sommant ces deux signaux, on tendra donc moins vite vers la gaussienne qu'avec des signaux mesurés d'une façon indépendante. La forme de la puissance injectée par une pale en sera donc affectée. Nos mesures ne nous permettent cependant pas de conclure pour la puissance injectée totale.

2.4.2 Écoulement ouvert dissymétrique quatre pales–huit pales.

Pour casser l'éjection latérale du fluide lorsqu'on retire les parois latérales, on ajoute sur le contour du disque une jupe comme le montre le schéma 2.22. Comme cette jupe tourne avec le disque, on s'attend à ce que le capteur extérieur du bord de attaque, p_1 , soit protégé par celle-ci. En fait, si on regarde les écarts types des mesures de pression, on s'aperçoit que ce sont les deux capteurs du bord d'attaque qui voient leurs fluctuations divisées par deux. Contrairement au cas confiné, leurs histogrammes sont presque identiques. La figure 2.23 montre qu'ils sont proches de ceux de p_1 dans le cas confiné. En terme d'amplitude des fluctuations, les mesures sur le bord de fuite ne semblent pas influencées par le confinement. Les écarts types des fluctuations sont du même ordre de grandeur et les histogrammes se superposent avec ceux du cas confiné.

Cela n'est plus vrai lorsqu'on considère les densités spectrales de puissance où les pics élargis ont pratiquement disparus pour les fluctuations de pression sur le bord de fuite. Ils sont encore présents sur les spectres du bord d'attaque quoique moins nombreux. Les densités spectrales de puissance de la pression mesurée à l'extérieur du bord d'attaque et à l'intérieur du bord de fuite sont tracées figure 2.24. Enfin, pour finir, précisons que les mesures sur le bord d'attaque sont corrélées ($\max(C_{p_1, p_3}) \approx 0,5$) sur des temps très courts, i.e. inférieurs au temps échantillonnage.

2.4.3 Écoulement co–rotatif confiné quatre pales–quatre pales.

On sait que l'écoulement de VON KÁRMÁN co–rotatif est beaucoup moins turbulent que l'écoulement contra–rotatif car les deux disques s'entraînent. La puissance nécessaire à fournir aux moteurs pour maintenir les disques à vitesse constante est beaucoup plus faible. La présence d'un écoulement organisé sur de grandes distances a d'ailleurs été mis en évidence [3]. Cette organisation va

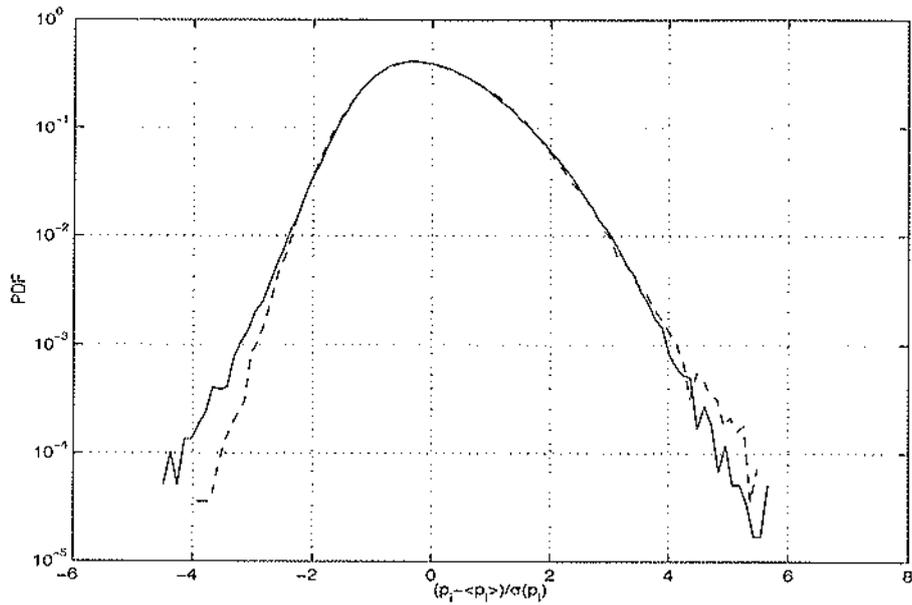


FIG. 2.23 – Fonction de densité de probabilité des fluctuations de la pression mesurée en deux points du bord d'attaque, normalisée par l'écart type, en configuration ouverte quatre pales-huit pales. La PDF en ligne continue provient du capteur à 9 cm, celle en tirets provient du capteur à 4 cm. $Re \equiv 3,2 \cdot 10^6$.

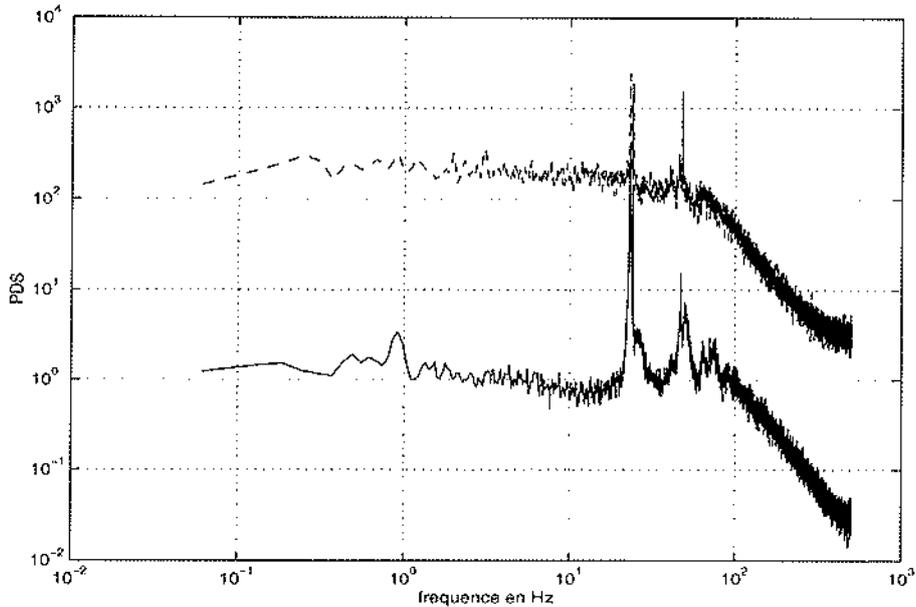


FIG. 2.24 – Densité spectrale de puissance des mesures de pression p_4 à l'intérieur du bord de fuite (en haut) et de la pression p_1 à l'extérieur du bord d'attaque (en bas), pour l'écoulement ouvert dissymétrique quatre pales-huit pales.

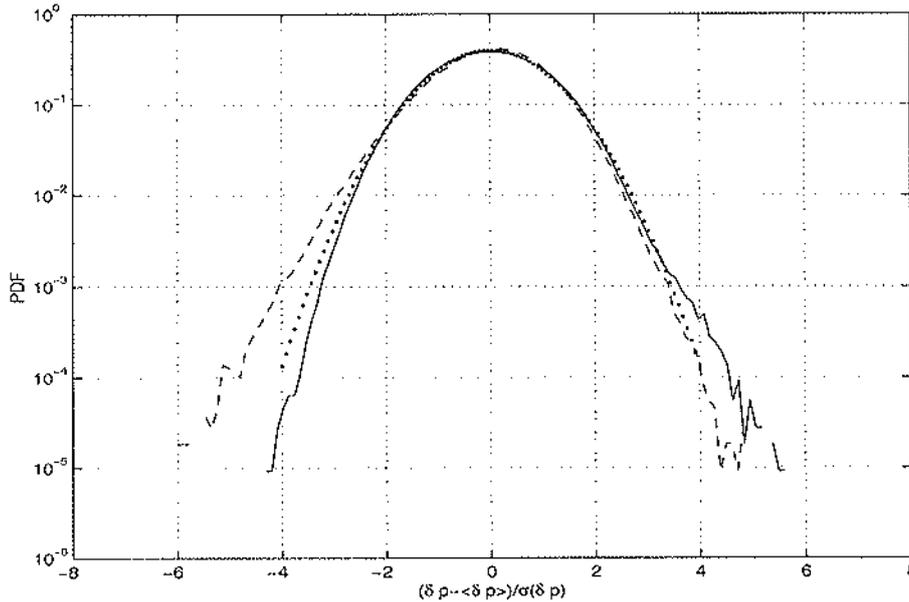


FIG. 2.25 — Fonctions de densité de probabilité des fluctuations normalisées par l'écart type de la trainée en écoulement fermé quatre pales—quatre pales contra-rotatif (— — —) et co-rotatif (—) pour un même fréquence de rotation des moteurs (24 Hz). En pointillé est représenté la gaussienne normalisée.

diminuer les fluctuations locales de trainée qui sont divisées par quatre ou cinq pour une même vitesse de rotation des disques. Les PDF de la trainée sont plus gaussienne et présentent plutôt une faible dissymétrie positive. La figure 2.25 compare les PDF des fluctuations de trainée à l'extérieur de la pale dans les configurations contra et co-rotatives pour une même vitesse de rotation (24 Hz). Le facteur de dissymétrie vaut 0,05 contre -0,27 dans le cas contra-rotatif (et 0 pour la gaussienne). Le facteur d'aplatissement vaut 2,89 dans la cas co-rotatif contre 3,35 dans le cas contra-rotatif (et 3 pour la gaussienne).

L'organisation du fluide en grands tourbillons reliant les deux disques donne à la densité spectrale de puissance l'aspect particulier de la figure 2.26. L'origine des nombreux pics à haute fréquence est sans doute à chercher dans l'usure du contact tournant qui pollue le faible signal issu des capteurs de pression. Les structures qui se développent font que les corrélations entre la trainée locale sur une pale sont plus importantes que précédemment dans le cas confiné (le maximum de la fonction de corrélation croisée vaut 0,33 contre 0,22 dans le cas de confiné). Ces corrélations sont maximales à un temps de 8,2 ms bien supérieur au cas confiné symétrique où elles étaient instantanées. Dans ce cas, où l'on sait qu'il existe des structures grandes échelles on peut s'intéresser aux probabilités conditionnées d'observer des événements rares positifs de trainée (puisque le facteur de dissymétrie est positif). Les résultats sont reportés dans le TABLEAU VIII avec ceux pour le cas contra-rotatif à la même fréquence de rotation des moteurs.

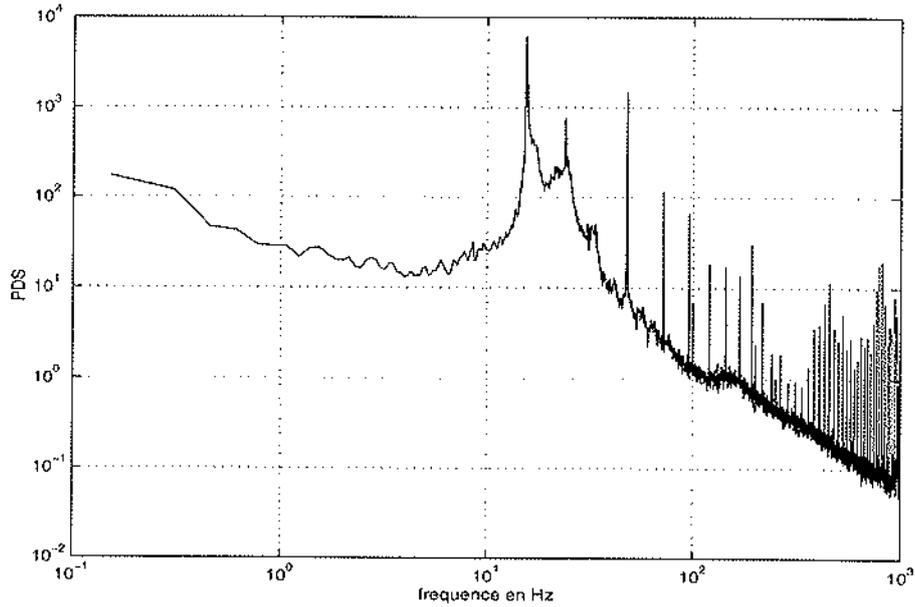


FIG. 2.26 – Densité spectrale de puissance de la force de trainée à 9 cm du centre.

	extrémum $C_{i,j}$	τ_c (ms)	$\rho(\delta p_1)$	$\rho(\delta p_1(t) \delta p_2(t))$	$\rho(\delta p_1(t) \delta p_2(t - \tau_c))$
Configuration ouverte	0,33	10,4	0,02	0,009	0,09
configuration fermée	0,22	~ 0	0,030	0,106	0,106

TABLEAU VIII: Corrélation des mesures de la trainée sur une pale en configuration ouverte et fermée quatre pales-quatre pales pour une vitesse de rotation des disques de 24 Hz. Sont donnés : le maximum de la fonction de corrélation croisée, le temps de corrélation maximum τ_c , la probabilité d'événements supérieurs (respectivement inférieurs) à deux fois l'écart type non conditionnée, respectivement conditionnée par la présence d'événements du même type sur l'autre capteur au même instant ou à un instant τ_c antérieur, pour la trainée sur une pale en écoulement ouvert (resp. fermé).

2.5 Conclusions

Nos mesures de pression et de trainée sur une pale nous ont permis de mettre en évidence des corrélations pour la pression sur des distances de l'ordre de la taille du disque. On a vu que ces corrélations étaient liées à la fréquence de rotation des disques. Par ailleurs, comme on l'a montré pour une pale, les corrélations qui existent entre fluctuations de pression de forte intensité, vont influencer la forme des fluctuations de la puissance injectée. Car, dans l'écoulement de VON KÁRMÁN, cette puissance est essentiellement le travail de la force de trainée qui s'exerce sur les pales. Les fortes corrélations entre les différentes pales nous empêchent cependant d'étendre la

forme des fluctuations de la puissance injectée par une pale à la puissance totale injectée. De plus, on ne connaît pas les corrélations qui existent entre les deux disques. Par contre, nos mesures montrent que dans l'écoulement de VON KÁRMÁN avec des disques munis de pales, au vu des mécanismes d'injections, il ne sera pas possible d'invoquer le théorème central limite pour décrire les fluctuations de la puissance injectée car la puissance injectée dans le volume ne peut pas être décomposée spatialement en une somme d'un grand nombre d'éléments indépendants.

Bibliographie

- [1] R. Labbé, J.-F. Pinton, S. Fauve 1996, *Journal de Physique II*, vol 35 p 1099.
- [2] L. Landau, E. Lifchitz 1971, *Mécanique des fluides*, Ed. Mir, p .
- [3] R. Labbé, "Ecoulement tourbillonnaire de Von Kármán" , Thèse de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, 1996.
- [4] S. Fauve, C. Laroche, B. Castaing 1993, *Journal de Physique II*, vol 3 p 271.
- [5] O. Cadot, S. Douady, Y. Couder 1995, *Physics of fluids A*, vol 7 n 3 p 630.
- [6] M. Holzer, E.D. Siggia 1993, *Physics of fluids A*, vol 5 n 10 p 2525.
- [7] R.H. Kraichnan 1974, *J. Fluid Mech.*, vol 62 part 2 p 305.

Chapitre 3

Fluctuations globales de température et de flux thermique en convection de RAYLEIGH–BÉNARD turbulente

3.1 Introduction : la convection de RAYLEIGH–BÉNARD dans le cadre des approximations de BOUSSINESQ.

La convection dans la configuration de RAYLEIGH–BÉNARD est le mouvement que l'on obtient dans une couche de fluide d'épaisseur d contenue entre deux plaques horizontales maintenues à deux températures différentes T_h et T_b (voir figure 3.1). Lorsque la plaque du bas est plus chaude ($T_b > T_h$), les forces de gravité ont tendance à engendrer le mouvement ascendant du fluide chaud plus léger. Ce mouvement est inhibé par les effets dissipatifs visqueux et thermiques. Pour des fluides usuels l'écoulement est bien décrit dans le cadre des approximations de BOUSSINESQ qui conduisent à une simplification des équations de transport de la mécanique des fluides.

3.1.1 Les approximations de BOUSSINESQ

On introduit généralement les équations de BOUSSINESQ en supposant que les approximations suivantes sont légitimes :

- la variation de densité ρ n'intervient dans le mouvement que via l'expansion thermique dans le terme des forces de gravité,

- le fluide peut donc être considéré comme incompressible,
- le travail des forces visqueuses et de pression est négligeable devant la conduction thermique et l'advection dans le transport de la chaleur,
- les caractéristiques physiques du fluide (viscosité η , conductivité thermique λ , chaleur spécifique C_p , coefficient d'expansion thermique α) sont indépendantes de la température.

Ces hypothèses ramènent les équations de transport au système d'équations :

$$\nabla \mathbf{v} = 0 \quad (3.1a)$$

$$\rho D_t \mathbf{v} = -\nabla p - \rho g [1 - \alpha(T - T_o)] \mathbf{e}_z + \eta \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3.1b)$$

$$\rho C_p D_t T = \lambda \nabla^2 T. \quad (3.1c)$$

avec $D_t = \partial_t + \mathbf{v} \nabla$ et T_o une température de référence. Ces hypothèses semblent naturelles à faibles gradients thermiques avec des fluides usuels. Mais, avant de les utiliser dans le cas de grands gradients thermiques ou de fluides supercritiques, on aimerait posséder un critère objectif de leur degré de validité. Pour ce faire, on peut chercher comment déduire des équations de transport de la mécanique des fluides celles de BOUSSINESQ (3.1).

Malkus [1] note, qu'avec les conditions aux bords, les équations de transport, complétées d'une équation d'état pour le fluide (3.2d),

$$D_t \rho = -\rho \nabla \mathbf{v} \quad (3.2a)$$

$$\rho D_t \mathbf{v} = -\nabla p + \partial_i \left[\eta (\partial_i v_j + \partial_j v_i) - \frac{2}{3} \eta \partial_k v_k \delta_{ij} \right] - \rho g \quad (3.2b)$$

$$\rho D_t (C_p T) = -p \nabla \mathbf{v} + \nabla (\lambda \nabla T) + \frac{1}{2} \eta (\partial_i v_j + \partial_j v_i)^2 - \frac{2}{3} \eta (\partial_k v_k)^2 \quad (3.2c)$$

$$\rho = -\rho_o [1 - \alpha(T - T_o) + \kappa(p - p_o) + \dots], \quad (3.2d)$$

comprennent 11 paramètres : d , $\Delta T = T_b - T_h$, C_p , η , λ , g , ρ_o , p_o , T_o , α , et κ que l'on peut combiner pour construire 7 paramètres indépendants sans dimension [2]. $\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ et $\kappa = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T$ sont respectivement les coefficients d'expansion thermique et de compressibilité isotherme. Il propose de construire ces paramètres indépendants d'une telle sorte que certains d'entre eux soient très petits devant 1, afin que l'on puisse faire un développement des équations (3.2) au premier ordre de ces petits paramètres. La petitesse de ces paramètres sans dimension sera un critère de validité objectif des équations simplifiées ainsi obtenues.

Pour choisir ces paramètres, Malkus utilise comme référence le champ hydrostatique adiabatique. En effet pour un fluide dans un tel état d'équilibre, les équations respectives de l'hydrostatique et des transformations adiabatiques :

$$\frac{dp_{ha}}{dz} = -\rho_{ha}g \quad (3.3a)$$

$$\rho_{ha}C_p dT_{ha} = T_{ha}\alpha dp_{ha} \quad (3.3b)$$

se résolvent, si on considère les coefficients α , κ , C_p , indépendants de z , et (3.2d) linéairement satisfaite (ce qui suppose de faibles gradients de température).

$$\frac{T_{ha}}{T_o} = \exp(-\mu_1 z/d) \quad (3.4a)$$

$$\frac{p_{ha}}{p_o} = (1 - A + B) \cdot \exp(-\mu_2 z/d) + A \cdot \exp(-\mu_1 z/d) - B \quad (3.4b)$$

On y voit déjà apparaître 4 paramètres sans dimension :

- $\mu_1 = \frac{\alpha g d}{C_p}$ qui est le rapport entre l'épaisseur de la couche convective et l'échelle de longueur caractéristique du gradient de température d'un fluide statique adiabatique.
- $\mu_2 = \rho_o \kappa g d$, où l'on notera que $C_s = \sqrt{g d / (\mu_1 + \mu_2)}$ est la vitesse du son dans le fluide.
- $\mu_3 = \alpha T_o$ qui caractérise la variation de ρ/ρ_o pour une variation relative d'une unité de la température par rapport à leur valeur de référence T_o ,
- et $\mu_4 = \kappa p_o$, qui caractérise la variation du rapport ρ/ρ_o pour une variation relative d'une unité de la pression par rapport à leur valeur de référence p_o .

On a $A = (\mu_2 \mu_3) / \mu_4 (\mu_2 - \mu_1)$ et $B = (1 + \mu_3) / \mu_4$

Malkus introduit également le paramètre $\epsilon = (\Delta T - \Delta T_{ha}) / T_o$, qui caractérise l'importance du gradient thermique imposé, corrigé du gradient thermique adiabatique statique sur la même épaisseur : $\Delta T = (T_o - T_d)$, $\Delta T_{ha} = T_o(1 - \exp(-\mu_1))$. Le nombre de PRANDTL, rapport des effets dissipatifs visqueux et thermiques : $Pr = \frac{\nu}{K}$, où $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ et $K = \frac{\lambda}{C_p \rho}$, forme le sixième paramètre indépendant. Le dernier paramètre mesure le rapport des temps caractéristiques des forces dissipatives : $\frac{d^2}{\nu}$ et $\frac{d^2}{K}$ sur le carré du temps caractéristique des forces d'ARCHIMÈDE. Il forme le nombre de RAYLEIGH : $Ra = \alpha T_o g c d^3 / \nu K$. C'est le paramètre de contrôle expérimental par l'intermédiaire de ΔT et d . Plus il sera grand plus le mouvement sera turbulent. On notera que dans cette définition du nombre de RAYLEIGH, Malkus retranche le gradient de température du fluide statique adiabatique au gradient de température imposé.

Les équations (3.2) sont ensuite développées autour du champ hydrostatique adiabatique : $\tilde{p} = \rho - \rho_{ha}$, $\tilde{T} = T - T_{ha}$, $\tilde{p} = p - p_{ha}$, $\tilde{v} = v$. Puis elles sont adimensionnées à partir de la longueur d : $r = d.r'$, de la vitesse caractéristique résultant de la force d'ARCHIMÈDE puisque c'est le moteur de la convection, $V = \sqrt{g d \epsilon}$: $t = (d/V).t'$, $\tilde{v} = V v'$ et $\tilde{p} = (\rho_o V^2) p'$. La température caractéristique

sera $\epsilon.T_o : \tilde{T} = (\epsilon.T_o)T'$ de même pour $\tilde{\rho} = (\epsilon\rho_o)\rho'$. Les grandeurs caractéristiques du fluide sont adimensionnées par leur valeur à l'état de référence $\{\rho_o, T_o, p_o\}$: $\eta = \eta_o.\eta'$, $\lambda = \lambda_o.\lambda'$, $C_p = C_{p_o}.C'_p$, $\alpha = \alpha_o.\alpha'$ et $\kappa = \kappa_o.\kappa'$, où l'indice o représente l'état de référence. Les équations (3.2) ainsi adimensionnées deviennent :

$$D_{i'}(\epsilon.\rho') + v'_{i'}\partial'_{i'}\left(\frac{\rho_{ha}}{\rho_o}\right) = \left(\epsilon\rho' + \frac{\rho_{ha}}{\rho_o}\right)\nabla'v' \quad (3.5a)$$

$$\left(\epsilon\rho' + \frac{\rho_{ha}}{\rho_o}\right)D_{i'}v'_{i'} = -\partial'_{i'}p' + \sqrt{Pr/Ra}.\partial'_{j'}\eta' \left[(\partial'_{i'}v'_{j'} + \partial'_{j'}v'_{i'}) - \frac{2}{3}\partial'_{k'}v'_{k'}\delta_{ij} \right] - \frac{\rho'c_z}{\mu_3} \quad (3.5b)$$

$$\begin{aligned} \left(\epsilon\rho' + \frac{\rho_{ha}}{\rho_o}\right) \left[D_{i'}(C'_p\epsilon T') + v'_{i'}\partial'_{i'}\left(\frac{C'_p.T_{ha}}{T_o}\right) \right] &= -\mu_1\epsilon \left(p' + \frac{\mu_4}{\mu_2\mu_3\epsilon} \frac{\rho_{ha}}{\rho_o} \right) \cdot \nabla'v' \\ + \frac{1}{\sqrt{Pr.Ra}} \cdot \nabla'\lambda'\nabla' \left(\epsilon.T' + \frac{T_{ha}}{T_o} \right) &+ \sqrt{Pr/Ra}\epsilon\mu_1\eta' \left[(\partial'_{i'}v'_{j'} + \partial'_{j'}v'_{i'})^2 - \frac{2}{3}(\partial'_{k'}v'_{k'})^2 \right] \end{aligned} \quad (3.5c)$$

$$\rho' = (\mu_3.T' + \mu_2.P'). \quad (3.5d)$$

Le TABLEAU I donne la valeur de nos 7 paramètres adimensionnés pour deux fluides usuels, l'eau et l'air, pour des conditions expérimentales où $d \approx 10$ cm et avec un $\Delta T \approx 1K$ autour d'une température de 300 K .

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	$\Delta T_{ha}/T_o$	ϵ	Ra	Pr
Eau	7.10^{-8}	4.10^{-7}	9.10^{-2}	4.10^{-5}	10^{-8}	$3,3.10^{-3}$	$2,5.10^7$	5,4
Air	3.10^{-6}	10^{-5}	1	1	3.10^{-6}	$3,3.10^{-3}$	9.10^4	0,7

TABLEAU I: Paramètres sans dimensions de MALKUS pour l'eau et l'air.

On constate que pour ces deux fluides de nature très différente, on a toujours μ_1 et $\mu_2 \ll 1$. Cela tient au fait que $\sqrt{\mu_3\epsilon.(\mu_1 + \mu_2)} = \frac{V}{C_s}$ le rapport de la vitesse thermique sur la vitesse du son dans le fluide, est toujours petit dans les conditions expérimentales. De même, quelque soit le fluide, si le gradient thermique n'est pas trop important, on aura toujours $\epsilon \ll 1$. On a reporté également dans le TABLEAU I le rapport $\Delta T_{ha}/T_o$. Sa petitesse fait que, généralement, on n'en tient pas compte dans le calcul de Ra . Cependant, dans l'hélium à basse température, à cause de sa faible viscosité et donc de la faible valeur du $\Delta T/d$ près du seuil de convection, on peut observer l'effet de ce gradient adiabatique sur ce seuil de convection [3].

Malkus développe donc les équations (3.5) en posant : $\rho' = \rho'_{000} + \epsilon.\rho'_{100} + \mu_2.\rho'_{010} + \mu_1.\rho'_{001} + \dots$. Il en va de même des autres variables $v' = v'_{000} + o(\epsilon, \mu_2, \mu_1)$, T' et p' . Pour les grandeurs caractéristiques des propriétés physiques du fluide on a, par exemple pour la viscosité adimensionnée : $\eta' = 1 + o(\epsilon, \mu_2, \mu_1)$. Au premier ordre les équations (3.5) deviennent :

$$\rho'_{000} = -\mu_3 T'_{000} \quad (3.6a)$$

$$\nabla'v'_{000} = 0 \quad (3.6b)$$

$$D_t' v'_{000} = \nabla' p'_{000} + T'_{000} e_z + \sqrt{Pr/Ra} \cdot \nabla'^2 v'_{000} \quad (3.6c)$$

$$D_t' T'_{000} = \frac{1}{\sqrt{Pr \cdot Ra}} \cdot \nabla'^2 T'_{000} \quad (3.6d)$$

où l'équation (3.6a) est tirée de l'équation d'état (3.5d). Les trois équations suivantes une fois redimensionnées donnent exactement les équations de BOUSSINESQ (3.1).

Mais nous disposons maintenant de critères donnant leurs limites de validité. En toute rigueur, on ne pourra utiliser (3.1) que si l'on a : $\frac{\alpha_o g d}{C_p \rho_o} \ll 1$, $\rho_o \kappa_o g d \ll 1$ et $\Delta T = T_b - T_h$, la différence de température entre les plaques, petite devant la température de référence T_o . Les deux premières conditions, équivalentes à l'exigence de vitesses hydrodynamiques faibles devant la vitesse du son, sont en général très bien vérifiées. La dernière condition peut être mise en défaut dans le cas de grand gradient thermique, parfois nécessaire pour la convection turbulente. Pour obtenir de grands nombres de RAYLEIGH, on devra, dans la mesure du possible, préférer l'augmentation de d^3 à celle du gradient de température, si on veut rester dans le cadre des approximations de BOUSSINESQ. Notons que, ce faisant, on augmente aussi $\Delta T_{ha} \approx (\alpha g d / C_p) T_o$, mais cette augmentation est linéaire. Concrètement, pour des fluides usuels, l'effet du gradient adiabatique reste négligeable pour la taille des expériences de laboratoire. Ce n'est plus vrai aux échelles atmosphériques ou avec de l'hélium près de son point critique.

Enfin, pour conclure, notons que le développement proposé ici des équations (3.5), ne se justifie pleinement qu'avec \sqrt{Ra} et \sqrt{Pr} qui reste d'ordre 1, ou au moins petit devant μ_1^{-1} et/ou μ_2^{-1} . Or dans les régimes très turbulents atteints expérimentalement aujourd'hui, on accède à des valeurs du nombre de Rayleigh supérieurs à 10^{14} [3]. Dans de tels régimes, l'emploi des équations de BOUSSINESQ est difficile à justifier. Il faudrait alors plutôt utiliser les équations obtenues à partir d'un autre développement du système (3.5) (en fonction du petit paramètre $1/\sqrt{Ra}$ par exemple).

3.1.2 Quelques résultats en convection de RAYLEIGH–BÉNARD turbulente.

Tant que le chauffage est insuffisant pour compenser les effets dissipatifs, le fluide reste immobile, et le transport de la chaleur se fait uniquement par conduction. Au dessus d'un certain seuil, caractérisé par un nombre de RAYLEIGH critique Ra_c qui ne dépend que des conditions aux limites, le fluide se met en mouvement. La description de cette transition ainsi que celle du mouvement du fluide à faible Ra se fait par l'étude faiblement non linéaire des équations (3.1) ou (3.6). Mais rapidement, les termes non linéaires de ces équations deviennent prépondérants lorsque Ra augmente (voir les équations (3.6c) et (3.6d)). Le mouvement fluide est alors turbulent. Aucune approche statistique à ce jour n'a pu décrire d'une façon générale les fluides en mouvement convectif turbulent.

Cependant, l'analyse dimensionnelle impose certaines contraintes sur les relations entre les différentes grandeurs décrivant la convection turbulente. Ainsi, le nombre de NUSSELT : $Nu = \frac{Q \cdot d}{\lambda \cdot \Delta T}$ rapport du flux thermique moyen à travers le fluide Q sur le flux thermique conductif, Q_{cond} , correspondant au même ΔT , $Q_{cond} = \frac{\lambda \Delta T}{d}$, ne sera fonction, pour une cellule de géométrie donnée, que des deux paramètres introduits précédemment : $Nu = f(Ra, Pr)$. Si maintenant on suppose

qu'en régime turbulent certaines grandeurs caractéristiques de l'écoulement ne sont plus pertinentes pour le transport de la chaleur, la relation entre Nu , Ra , et Pr peut devenir une loi de puissance.

Par exemple, si on suppose qu'en régime turbulent fortement non linéaire les effets visqueux deviennent négligeables dans le transport de la chaleur, alors Q , et par suite Nu , doivent être indépendants de la viscosité et donc nécessairement, on doit avoir Nu fonction du produit $Ra \cdot Pr$ uniquement. De plus, si on suppose que la conduction thermique devient également négligeable devant l'advection, alors Q doit être indépendant de λ et par conséquent le nombre de NUSSELT doit varier en $1/\lambda$. On en déduit la loi de puissance $Nu \propto (Ra \cdot Pr)^{1/2}$.

Expérimentalement, on a donc cherché des lois de puissance entre ces trois paramètres, afin de mieux comprendre le transport convectif turbulent grâce aux hypothèses que l'on doit faire pour retrouver les exposants expérimentaux. Ainsi, il y a une dizaine d'années encore, les expériences s'accordaient plutôt sur une variation du nombre de NUSSELT en exposant $1/3$ avec nombre de RAYLEIGH. Cette loi implique l'indépendance du flux de chaleur Q vis à vis de l'épaisseur d du fluide. On s'est donc fait l'image suivante du mouvement convectif turbulent (voir la figure 3.1) [4]:

- au centre de la couche, le mélange du fluide par le champ de vitesse turbulent est tel que la température est homogène,
- mais près des parois il existe des couches limites thermiques où se concentre l'essentiel du gradient thermique et où le transport de la chaleur se fait par conduction,
- le flux de chaleur Q étant indépendant de z , il sera fixé par sa valeur au niveau des couches limites où il vaut $Q = \frac{\lambda \Delta T}{2 \cdot e_c}$ avec e_c l'épaisseur d'une couche limite thermique.
- or dans ce modèle où les deux couches limites sont indépendantes, leur épaisseur ne dépend pas de la distance d . L'épaisseur e_c est telle que la couche limite soit au seuil de la première instabilité convective c'est à dire telle que: $e_c = \left(\frac{2 \cdot Ra_c \cdot \nu \cdot K}{g \cdot \alpha \cdot \Delta T} \right)^{1/3}$.

Il est à noter que cette hypothèse sur la stabilité de la couche limite thermique ne tient que si celle-ci est incluse dans la couche limite visqueuse. C'est à dire qu'elle ne devrait pouvoir s'appliquer que si il n'existe pas d'écoulement moyen (auxquel cas il n'y pas de couches limites visqueuses) ou, dans le cas contraire, il faut que le fluide ait un nombre de PRANDTL supérieur à 1.

Depuis les expériences entreprises dans l'hélium à basse température [5] [6], permettant l'étude des relations entre nombres de NUSSELT et de RAYLEIGH sur un grand nombre de décades (jusqu'à $13!$ [3]), il semble qu'une loi en $Nu \propto Ra^{2/7}$ puisse s'appliquer sur une grande gamme de valeurs du nombre de RAYLEIGH. Dans l'esprit de ce qui précède, on peut interpréter cet exposant de $2/7$ en introduisant une couche de mélange où les plumes chaudes arrachées de la couche limite thermique se mélangent progressivement au fond turbulent avant d'atteindre la zone centrale [6]. Mais une autre interprétation, introduisant un écoulement moyen liant les couches limites thermiques, conduit également au même exposant pour le nombre de RAYLEIGH [7]. Pour trancher entre ces deux modèles, il faudrait pouvoir mettre en évidence un écoulement moyen advectant les plumes thermiques et mesurer son importance dans le transport de la chaleur.

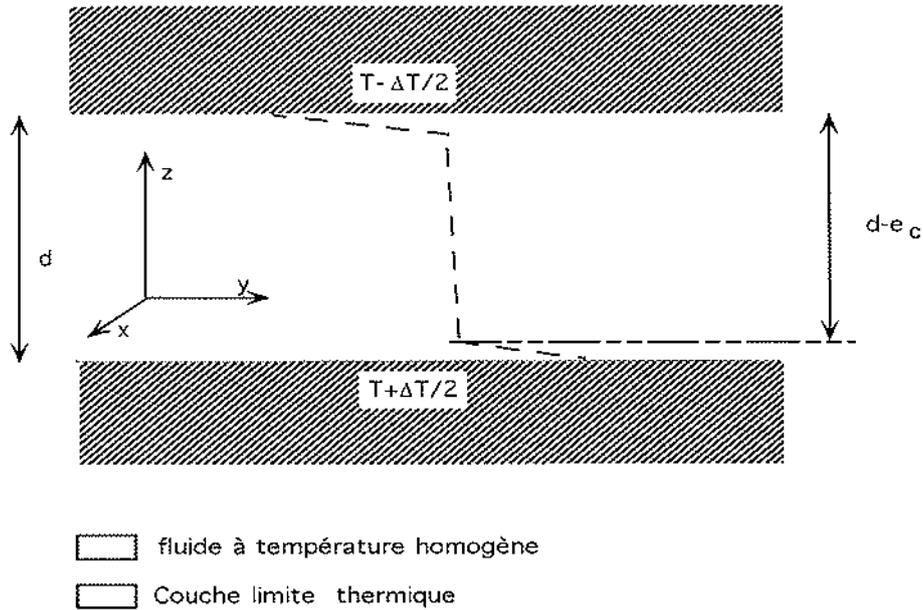


FIG. 3.1 – Schéma de la convection dans la configuration de RAYLEIGH-BÉNARD c'est à dire entre deux plans horizontaux infinis maintenus à des températures de $T_b = T + \Delta T/2$ sur la plaque du bas et $T_h = T - \Delta T/2$ sur la plaque supérieure. Les tirets représentent le profil de température dans le cas du modèle de couches limites thermiques indépendantes pour lequel $Nu \propto Ra^{1/3}$

Nos dispositifs expérimentaux n'ont pas pour but d'établir la valeur de ces exposants puisqu'ils n'ont pas été faits dans cet objectif, mais dans celui de mesurer des fluctuations de grandeurs globales. Cependant, un accord raisonnable avec les lois de puissance énoncées ci-dessus nous a permis de valider nos montages. De plus, nous avons entrepris la mesure de la vitesse des plumes thermiques à partir du décalage DOPPLER d'ondes acoustiques diffusées par l'écoulement afin de mettre en évidence la présence éventuelle d'un écoulement moyen.

3.2 Dispositifs expérimentaux

Comme nous l'avons vu au chapitre d'introduction, un système convectif dans la configuration de RAYLEIGH-BÉNARD semble adapté à l'étude des fluctuations de grandeurs globales, et notamment de la puissance injectée dans un système dissipatif turbulent. Dans ce but nous avons utilisé trois cellules de convection distinctes. La première, notée cellule I, est une évolution de celle utilisée par A. Chiffaudel dans un tout autre cadre [8]. Toutes nos mesures préliminaires ont été faites grâce à elle. Elle nous a permis de mettre au point une seconde cellule, notée cellule II, plus grande et plus spécifiquement adaptée à nos types de mesures. Par ailleurs, nous avons pu disposer d'une cellule de CO_2 dont le remplissage a été réalisé de manière à ce que l'on puisse atteindre le point critique en variant la température. Elle sera notée cellule III dans la suite. Ce paragraphe a pour objet la description de ces trois dispositifs et des mesures qu'ils ont permis de réaliser.

3.2.1 Description de la cellule I

Géométrie de la cellule convective

La figure 3.2 schématise la première cellule que nous avons utilisée. Les parois latérales sont faites d'un cylindre de plexiglass d'une hauteur de 6 cm et d'un diamètre intérieur de 6 cm (rapport d'aspect de 1). Nous avons également utilisé un cylindre d'une hauteur de 8 cm pour un diamètre de 4 cm (rapport d'aspect de 1/2) afin d'augmenter la valeur maximale du Ra accessible. Le chauffage est assuré par une feuille résistive chauffante *Minco* ronde de diamètre égal à celui du cylindre. Celle-ci est collée avec du *Stycast FT 2850* sur une fine plaque de cuivre de façon à avoir le meilleur contact possible pour le minimum d'inertie thermique. La feuille résistive chauffante est alimentée en tension continue par une alimentation *HP 6575 A*. Le refroidissement de la plaque supérieure est assuré par un bain thermostaté *Lauda RK 20* qui maintient à température constante un gros bloc de cuivre lui-même au contact du fluide. Pour éviter au maximum les pertes thermiques latérales, qui entraînent une variation du flux thermique à travers le fluide lorsque z augmente, l'ensemble est placé dans une enceinte où l'on effectue un vide secondaire (où la pression est de l'ordre de 10^{-5} mBar). L'ensemble est posé sur un support accroché au mur, dont on peut régler précisément l'horizontalité.

On a utilisé de l'eau déminéralisée comme fluide. Elle est dégazée lors du remplissage. Comme nous étions limités à une hauteur maximale de 8 cm, pour atteindre des nombres de RAYLEIGH suffisamment élevés nous avons dû imposer de grands ΔT (pouvant atteindre jusqu'à $20\text{ }^{\circ}\text{C}$). Le paramètre sans dimension ϵ introduit précédemment n'est plus négligeable puisqu'il vaut alors presque 0,1. Ce sont les coefficients caractéristiques des propriétés physiques du fluide, le coefficient d'expansion thermique et la viscosité notamment, qui varient notablement sur la plage de température ΔT (voir le TABLEAU II). Cependant, sur une majeure partie de son volume, au centre de la cellule, la température moyenne et donc ces coefficients sont uniformes. On s'est donc efforcé de maintenir la température constante au milieu de la cellule, en diminuant la température en haut et en augmentant celle du bas de manière simultanée. Pour le calcul des paramètres adimensionnés Ra , Pr , et Nu , lors de la vérification des lois d'échelles notamment, on a choisi la valeur des coefficients η_o , α_o , C_{po} et λ_o pour la température au centre. Le TABLEAU II donne la valeur de ces coefficients à la température des parois et au centre pour un $\Delta T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ ainsi que les différentes valeurs des nombres de PRANDTL et de RAYLEIGH calculés à partir d'eux. On voit qu'on est loin de l'approximation de BOUSSINESQ qui les considère comme constants. Notons qu'en gardant la température au centre de la cellule égale à celle de la pièce l'environnant, on équilibre à peu près les inévitables échanges d'énergie par rayonnement.

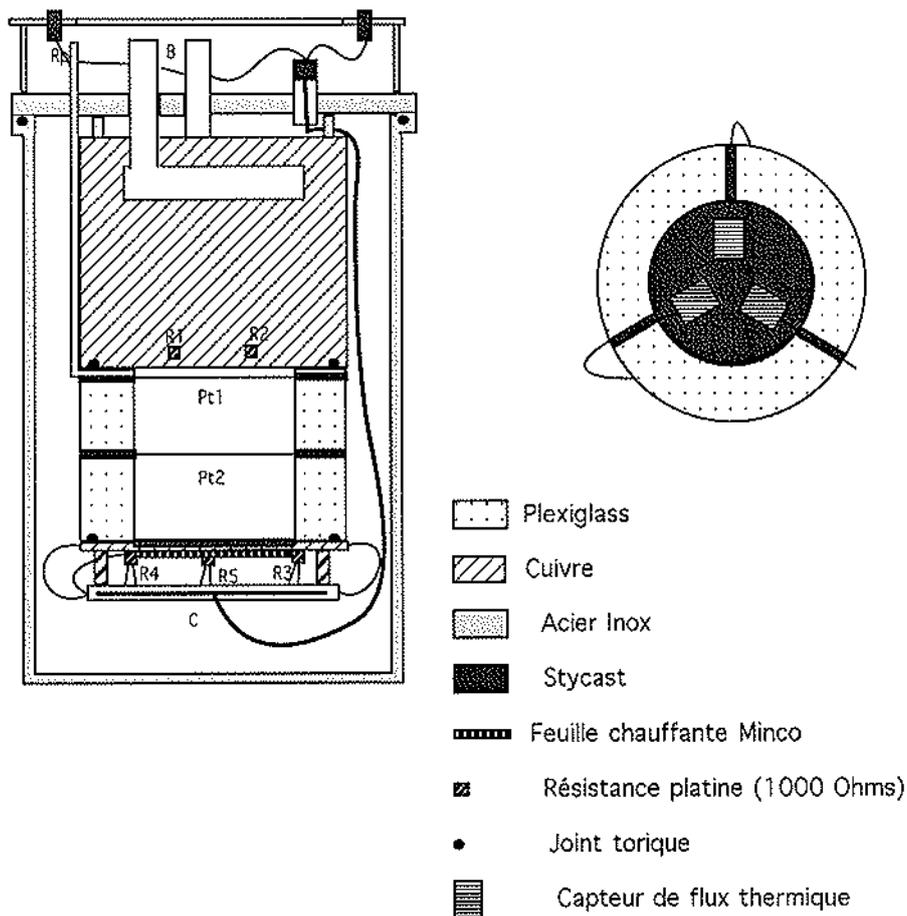


FIG. 3.2 -- Schéma de la cellule I. Les dimensions du cylindre contenant le volume de fluide convectif sont de 6 cm de diamètre pour une hauteur de 6 cm. Sur la coupe verticale de gauche, on notera en premier lieu la position des fils de platine, où Pt1 repère les trois fils parallèles près de la plaque supérieure et Pt2 le fil tendu au centre. R1, R2 et R3, R4, R5 sont les résistances de platine de 1 000 Ω qui donnent la température moyenne de la plaque supérieure et inférieure respectivement. Toutes ces mesures de résistances sont faites en quatre fils. L'ensemble des capteurs est relié à l'extérieur par l'intermédiaire du connecteur C. B repère les tubes de connection au bain thermostaté et Rp le tuyau de remplissage de la cellule. Après remplissage, il est connecté à un vase d'expansion de manière à garder constante la pression dans la cellule. La position des capteurs de flux thermique sur la plaque du bas est présentée à droite. Ces capteurs sont insérés dans une fine couche de STYCAST FT 2850

	ρ_o (kg/m ³)	η (μ Pa.s)	α (K ⁻¹)	C_p (J/(g.K))	λ (mW/(m.K))	Ra	Pr
$T_b = 30$ °C	995,6	797,7	$3,02.10^{-4}$	4,178	615,0	$10,8.10^7$	5,4
$T_m = 20$ °C	998,2	1002	$2,06.10^{-4}$	4,182	598,4	$6,08.10^7$	7
$T_h = 10$ °C	999,7	1307	$0,88.10^{-4}$	4,192	580,0	$2,06.10^7$	9,4

TABLEAU II: Variations des propriétés physiques de l'eau entre le haut à la température T_h , le milieu (à T_m) et le bas (à T_b) de la cellule I, pour un ΔT de 20 °C. Ces coefficients donnent des valeurs différentes des nombres de RAYLEIGH et de PRANDTL

Capteurs et mesures

Dans cette cellule, on a pu contrôler la tension et l'intensité aux bornes de la résistance de chauffage donc le flux thermique moyen traversant la surface inférieure. La différence de température entre les plaques supérieure et inférieure est connue au moyen de résistances de platine *Sensycom* de 1000 Ohms de dimension 5 mm par 5mm. On avait ainsi trois résistances en série en bas et deux en haut, le tout étant monté en quatre fils. La mesure des résistances a été faite grâce à des ponts de mesure *Elektronikka AVS-46*. Cet ensemble de capteurs suffit pour établir la relation entre Nu et Ra .

De plus, nous avons tendu dans la cellule des fils de platine de 0,1 mm de diamètre, au milieu et à 3mm du haut de la cellule. La mesure de leur résistance avec un micro-ohmètre *HP 34420* (d'une précision de 10^{-2} $\mu\Omega$ dans notre gamme d'utilisation), nous donne une mesure des fluctuations de température intégrée sur une ligne avec une excellente résolution temporelle que l'on peut estimer à 0,5 ms.

Enfin nous avons utilisé des capteurs de flux thermique *Omega HF3*. Ces capteurs sont composés de 40 thermocouples montés en série autour d'une fine épaisseur de Kapton de conductivité thermique ($\lambda_K = 0,3W/(m \cdot K)$) et d'épaisseur connue ($e_K = 0,23mm$). La f.e.m aux bornes du capteur est proportionnelle au flux thermique le traversant. Avec trois de ces capteurs, d'une dimension de 2 cm par 1,5 cm chacun, on obtient une bonne estimation du flux total traversant la plaque inférieure de notre montage, comme le montre la figure 3.2. Mais ces capteurs posent deux problèmes :

- Ils ont leur propre conductivité et ils modifient donc localement celle de la plaque où ils sont incorporés. Par conséquent, ils rendent le flux à travers la plaque et la température à la surface inhomogène. On peut estimer que leur présence entraîne une inhomogénéité de température sur la plaque du bas d'environ 30 % en régime statique. Cependant, les fluctuations temporelles qu'ils mesurent, sont la trace des fluctuations de flux thermique dues au mouvement turbulent. On a fait l'hypothèse que les propriétés statistiques du transport turbulent ne sont pas trop modifiées par les inhomogénéités de température.
- Leur temps de réponse est important (0,6s). Il est à comparer aux temps caractéristiques du mouvement convectif comme cela est fait TABLEAU III pour un $\Delta T = 10$ K. τ_ν et τ_K sont les temps associés aux dissipations, visqueuse et thermique, sur l'épaisseur de la couche

limite thermique e_c , et τ_A caractérise la force d'ARCHIMÈDE dans le volume turbulent. On constate sur le TABLEAU III que le temps de réponse du capteur est de l'ordre de τ_A .

$\tau_\nu = \frac{e_c^2}{\nu}$	9.4 s
$\tau_K = \frac{e_c^2}{K}$	65 s
$\tau_A = \sqrt{\frac{d}{\alpha.g.\Delta T}}$	0,67s

TABLEAU III

Une solution pour accroître le temps caractéristique de la force d'ARCHIMÈDE est d'augmenter la taille de la cellule. Mais surtout, cela nous permet d'explorer une plus grande gamme de nombres de RAYLEIGH sans s'éloigner pour autant de l'approximation de BOUSSINESQ. Par ailleurs, on peut également augmenter la valeur du nombre de RAYLEIGH en utilisant un fluide comme l'éther qui, pour une même différence de température, multiplie par plus de 10 le nombre de RAYLEIGH. Nous avons donc été amenés à concevoir une cellule plus grande, apte à recevoir de l'éther.

3.2.2 Cellule II

Description de la cellule

Il nous est apparu nécessaire de concevoir une nouvelle cellule, représentée figure 3.3, avec un diamètre de 10 cm pour une hauteur d'au moins 20 cm. Pour une cellule de telles dimensions, il nous a semblé difficile de réaliser une isolation par un vide secondaire dans des délais raisonnables. En pareil cas, en chauffant par une résistance à puissance constante, on chauffe également l'air autour de la plaque inférieure. Du coup, on ne fixe correctement, ni la température cette plaque, ni la quantité de flux de la chaleur moyen qui la traverse ou qui est échangée avec l'extérieur. Nous avons donc préféré maintenir ici la différence de température entre les plaques au moyen de deux bains thermostatés, *Lauda RCS 20* pour chauffer le bas et *RC6* pour refroidir la plaque du haut. Les montants latéraux sont en PVC, matériaux qui, contrairement au Plexiglass, n'est pas attaqué par l'éther. Les plaques supérieure et inférieure sont formées de deux blocs de cuivre dans lesquels est aménagée une circulation pour l'eau venant des bains thermostatés. Ces blocs de cuivre sont recouverts d'une fine couche (2mm) de *Stycast FT 2850* où ont été noyés nos capteurs. C'est cette couche qui est au contact du fluide convectif. L'horizontalité est réglée au moyen de trois pieds en tiges filetées. Comme précédemment, on augmente la température de la plaque du haut et on diminue celle du bas simultanément de manière à garder la température du centre de la cellule constante quelque soit le nombre de RAYLEIGH.

Capteurs et mesures.

Pour connaître d'une manière précise la température des plaques supérieure et inférieure de la cellule des résistances de platine 100 Ω *Sensycom*, de dimension 2 mm par 2 mm, ont été placées

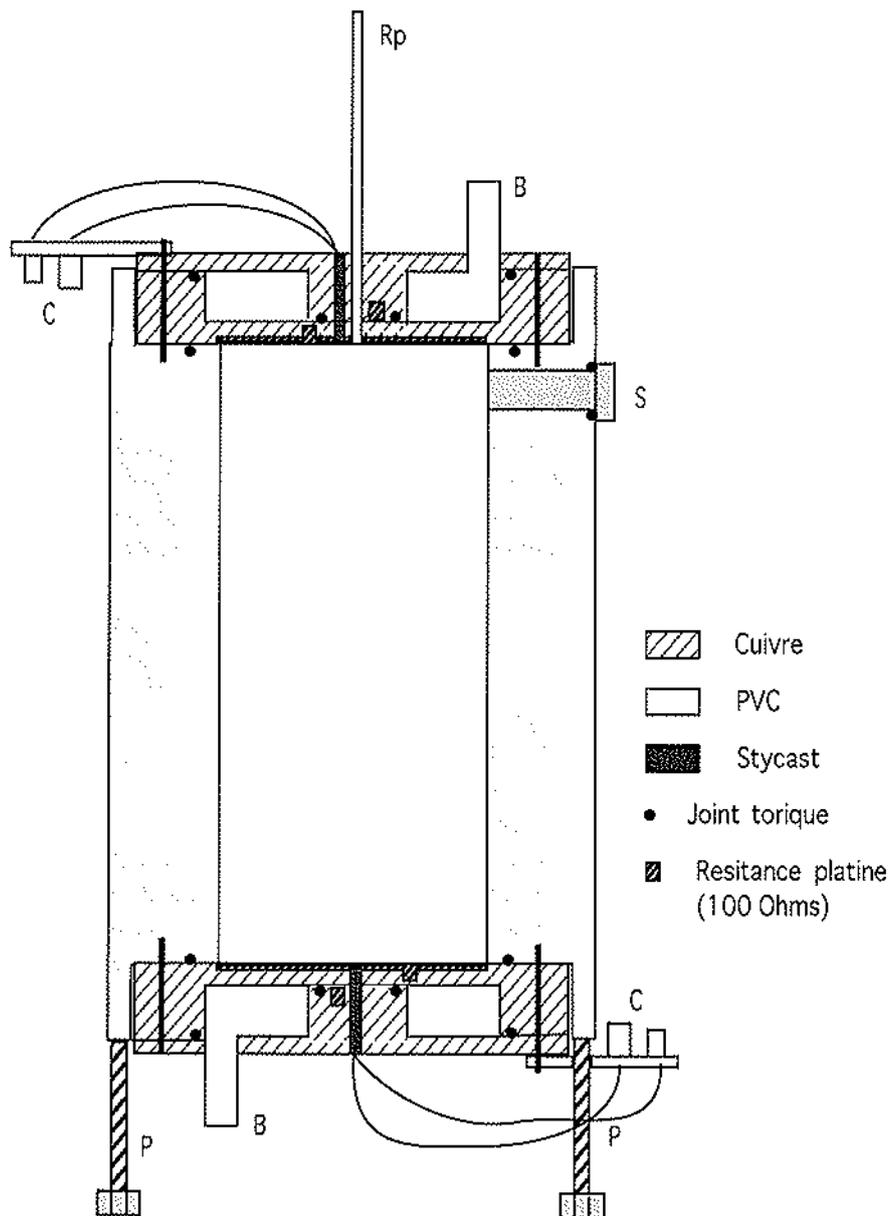


FIG. 3.3 – Schéma de la cellule II. Les parois latérales sont formées d'un cylindre en PVC de 10cm de diamètre intérieur pour une hauteur de 20cm et une épaisseur de 3cm. Les plaques du haut et du bas sont formées de deux blocs de cuivre recouverts d'une couche de 2 mm de STYCAST FT 2850. Les capteurs de flux thermique OMEGA HF3, une résistance de platine SENSYCOM 100 Ω et quatre thermocouples Chromel-Alumel ont été placés dans cette couche. B permet la connection aux bains thermostatés LAUDA RK 20 et RC6. le tube Rp sert au remplissage et à la connection au vase d'expansion. Les trois pieds P sont des tiges filetées permettant le réglage de l'horizontalité. Enfin S repère la position des émetteurs d'ultra-sons.

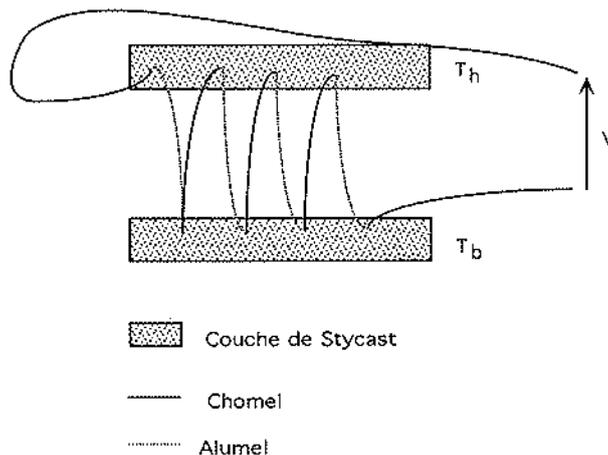


FIG. 3.4 - Schéma de montage des thermocouples entre la plaque supérieure à T_h et inférieure à T_b . On a $V \propto T_h - T_b$

au sein même des blocs de cuivre. Leur résistance est connue grâce au pont de mesure *Elektronikka AVS-46*. D'autres résistances identiques, avec le même temps de réponse de 0,06 s, ont été insérées dans la couche de *Stycast*, c'est à dire pratiquement au contact du fluide. On s'est intéressé à leurs fluctuations qui correspondent aux fluctuations de température en un point de l'interface entre le fluide et la paroi. Pour connaître ces fluctuations, les résistances sont placées dans des ponts de mesure de fabrication locale dont la fréquence de coupure est plus élevée que celles des ponts *Elektronikka*.

Comme pour la cellule précédente, nous avons utilisé les capteurs de flux *Omega HF3*. Mais cette fois-ci, nous en avons placé aussi bien en bas qu'en haut. Nous nous sommes intéressés aux fluctuations des trois capteurs placés sur la plaque chaude, à un angle de 90° les uns des autres. Ils sont montés en série et mesurés avec un multimètre *Keithley 2010* d'une précision de 10nV dans notre gamme d'utilisation. Les deux capteurs, placés à 180° sur la paroi froide du haut, sont mesurés avec un nanoVoltmètre *HP 34420*. La différence entre leur valeur moyenne nous donne une estimation des fuites latérales de flux thermique. Grâce à cela, nous avons pu constater qu'il est nécessaire de se placer dans une pièce dont la température est contrôlée à la même valeur que celle du milieu de la cellule.

Pour connaître les fluctuations du $\Delta T = T_b - T_h$, nous avons placé dans la couche de *Stycast* de chaque plaque quatre thermocouples de type K. En les montant en série par couple entre le haut et le bas en suivant le schéma de la figure 3.4, la tension en sortie est proportionnelle à ΔT .

Enfin, les dimensions de cette cellule nous ont permis d'envisager la mesure de la vitesse des plumes thermiques par effet DOPPLER. En effet, on sait que les gradients de température rétrodiffusent les ondes sonores. Si ces centres diffuseurs se déplacent à une vitesse V par rapport à l'émetteur, l'onde qu'ils réémettent sera reçue avec un décalage DOPPLER en fréquence de $\Delta\nu/\nu_e = 2 \cdot V/C$, par un récepteur immobile, placé à côté de l'émetteur (puisque les gradients de température retrodiffusent les ondes ultra-sonores). Où ν_e est la fréquence d'émission de l'onde,

$\Delta\nu$ le décalage en fréquence entre l'onde émise et celle reçue et C_s la vitesse de propagation du son dans le fluide. De plus, la diffusion sera d'autant plus importante que la longueur d'onde est voisine de la taille des centres diffuseurs, que l'on peut estimer être du même ordre que l'épaisseur de la couche limite. Le TABLEAU IV montre, qu'en principe, ce décalage DOPPLER est observable avec un montage du type de celui présenté figure 3.5. Pour cela, il faut utiliser un analyseur de spectre haute fréquence *HP 3589 A* dont la source permet d'engendrer une onde incidente particulièrement monochromatique. Celle-ci peut être connecté à l'un des d'émetteur d'ultra-sons *Matec* à notre disposition, dont les bandes passantes sont autour de 500 kHz, 2,25 MHz et 10 MHz.

	C_s	U_{th}/C_s	e_c	$\nu_c = 0,5 MHz$		$\nu_c = 2,25 MHz$		$\nu_c = 10 MHz$	
				$\Delta\nu$	λ_s	$\Delta\nu$	λ_s	$\Delta\nu$	λ_s
eau	1500 m/s	$4,2 \cdot 10^{-5}$	0,55 mm	21 Hz	3 mm	94,5 Hz	0,66 mm	420 Hz	0,15 mm
ether	970 m/s	$2 \cdot 10^{-4}$	0,22 mm	100 Hz	1,94 mm	450 Hz	0,43 mm	2000 Hz	0,09 mm

TABLEAU IV : Décalage DOPPLER attendu pour des plumes thermiques avec un contraste de température de $10^\circ C$ autour de $20^\circ C$ dans la cellule II. $U_{th} = \sqrt{\alpha \cdot g \cdot \Delta T \cdot d}$ est la vitesse typique des plumes thermiques avec, $d = 20$ cm la hauteur de la cellule. λ_s est la longueur d'onde de l'onde émise.

D'après le TABLEAU IV, l'émetteur de 2,25 MHz est particulièrement adapté à la taille des plumes. Mais la vitesse U_{th} est probablement une surestimation. C'est la vitesse maximum des plumes plutôt que leur vitesse moyenne dans une direction. Avec ce seul émetteur on risque d'être à la limite de résolution pour des différences de températures modérées. On utilisera donc également les émetteurs à 10 MHz. Afin d'être le plus possible dans l'axe de l'écoulement moyen éventuel avec au moins un des couples d'émetteur-récepteur, ils ont été placés à 90° (voir la figure 3.5). On notera que la zone de mesure est à une distance $D = 8$ cm de l'émetteur. On n'est donc pas en condition de champ lointain qui impose: $D \gg d_e^2 / (4 \cdot \lambda_s)$ avec d_e le diamètre des émetteurs, soit pour l'émetteur de 2,25 MHz: $D \gg 9,7$ cm. Si on s'intéressait à l'intensité ou à la direction de l'onde diffusée, cela pourrait rendre difficile la comparaison avec les prévisions théoriques qui ne sont valides que dans cette approximation de champ lointain. Toutefois, le décalage DOPPLER en fréquence n'est pas influencé par la distance à la zone de mesure¹.

3.2.3 Cellule III: convection dans le CO_2 gazeux près du point critique.

Comme on l'a vu précédemment avec l'éther, le choix de certains fluides permet d'augmenter le nombre de RAYLEIGH. Or on sait qu'au point critique $\{T_c, P_c, \rho_c\}$, la transition liquide-gaz est du deuxième ordre [9]. Les dérivées secondes de l'enthalpie libre par unité de masse g (en variable T, p) y sont discontinues. Donc les coefficients $C_p = T \left(\frac{\partial^2 g}{\partial T^2} \right)_p$ et $\alpha = -\rho \left(\frac{\partial^2 g}{\partial T \partial p} \right)$ divergent quand

1. En champ lointain, l'angle diffusion permet de faire la distinction entre la diffusion par un gradient de température, qui rétrodiffuse, et la diffusion par un vortex, qui a lieu préférentiellement vers l'avant et qui est nulle en rétrodiffusion. Mais cette dernière, quadrupolaire, est de toute façon beaucoup plus faible que l'onde dipolaire diffusée par les plumes thermiques.

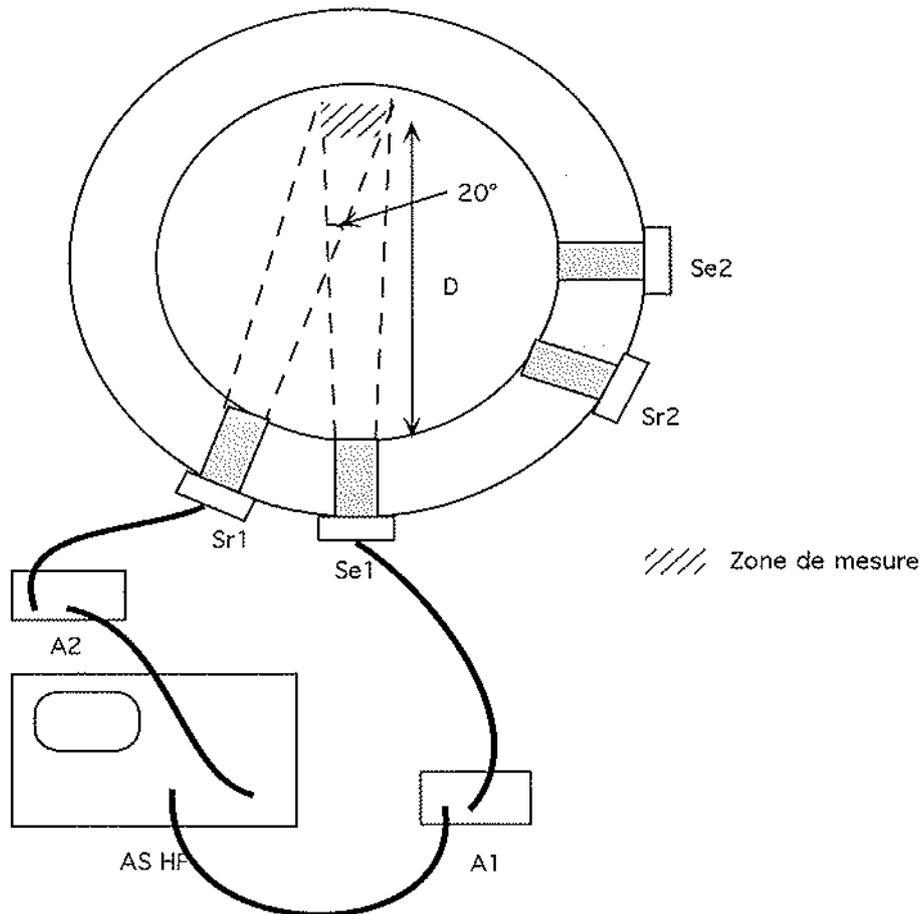


FIG. 3.5 – Positionnement des émetteurs Se1 et Se2 et récepteurs Sr1 et Sr2 d'ultra-sons autour de la cellule II. L'angle entre émetteur et récepteur est de 20° . Ces émetteur-récepteurs se présentent essentiellement sous la forme d'un cylindre de diamètre $d_c = 1,6$ cm. Le centre des émetteurs est à 1 cm du haut de la cellule (cf figure 3.3). On notera que la zone de mesure n'est pas au centre de la cellule mais à une distance $D=8$ cm de l'émetteur car on craignait que la vitesse moyenne soit nulle au milieu. On utilise la source de l'analyseur de spectre HP 3589 A comme générateur de signal monochromatique. Ce signal est envoyé sur les émetteurs après amplification par un amplificateur de puissance haute fréquence KMP 150 MODULE (A1). Le signal reçu est étudié sur l'analyseur HP 3589 A après une éventuelle amplification par l'amplificateur haute fréquence EGG 5183 WIDE BAND PREAMPLIFIER (A2)

T tend vers T_c . De même comme les longueurs de corrélation microscopiques atteignent des valeurs mésoscopiques, les coefficients de transport divergent. Ce sont, en partie, ces propriétés qui ont été mises à profit lors des expériences dans l'hélium à basse température [5, 6, 3].

De plus, du fait des fortes fluctuations de densité, un fluide près de son point critique a d'importantes fluctuations de ces propriétés optiques, de sorte qu'au point critique le fluide devient turpide, c'est l'opalescence critique. Cela nous a amené à mesurer les fluctuations globales de l'indice optique, donc du gradient de densité, et par suite, dans le cadre des approximations de BOUSSINESQ, du gradient de température, dans du CO_2 supercritique. Mais avant de décrire la cellule qui nous a été prêtée par Y. Garrabos, et de s'intéresser au montage, on peut s'interroger sur le bien fondé de l'utilisation des approximations de BOUSSINESQ pour les fluides supercritiques pour lesquels tous les coefficients de transport divergent.

Critères de MALKUS sur la pertinence des approximations de BOUSSINESQ appliquées au CO_2 près du point critique.

A volume constant, la divergence des coefficients caractéristiques d'un fluide près de son point critique, est donnée en loi de puissance de l'écart en température par rapport à la température critique. La détermination des exposants de ces lois, dit exposants critiques, a fait l'objet de beaucoup d'expériences afin de confronter les exposants critiques expérimentaux à ceux prévus par la théorie du groupe de renormalisation. La connaissance de ces lois nous permet de déterminer la valeur des coefficients sans dimension définis en introduction, en fonction de l'écart à la température critique. La figure 3.6 qui présente les 7 paramètres sans dimension en fonction la différence $T_o - T_c$, nous montre que jusqu'à 1 Kelvin du point critique, on a toujours : μ_1 , μ_2 , et $\epsilon \ll 1$ (courbe a) b) et e)) et l'utilisation des équations de BOUSSINESQ se justifie bien.

Cependant on notera :

- que lorsqu'on s'intéresse au seuil d'instabilité dans un tel fluide on peut avoir à tenir compte du gradient thermique adiabatique puisque, du fait de la divergence des coefficients de transport, la différence de température nécessaire au seuil de l'instabilité est très faible². Pour notre cellule de CO_2 avec T_o à 1 K de T_c on fait déjà une erreur de 10 % sur le seuil de convection en ne le prenant pas en compte. Cela s'accroît lorsque T_o s'approche de T_c [3].
- qu'on ne peut pas faire varier Ra sans que le nombre de PRANDTL ne change (courbe f) et g)), ce qui posera des problèmes pour déterminer les lois d'échelles entre Nu , Ra et Pr .
- que tous les développements que nous avons faits des équations (3.2) ont été faits pour un système à pression constante, or dans la cellule qui nous a été fournie c'est le volume qui est constant. Donc les variables thermodynamiques pertinentes sont la température et le volume plutôt que la pression.

Ce dernier point a son importance. En effet, du fait de leur très forte compressibilité et expansivité, le moindre gradient de température dans un petit volume de fluide supercritique peut engendrer

². Le gradient adiabatique quant à lui, est proportionnel à α/C_p et ne diverge pas

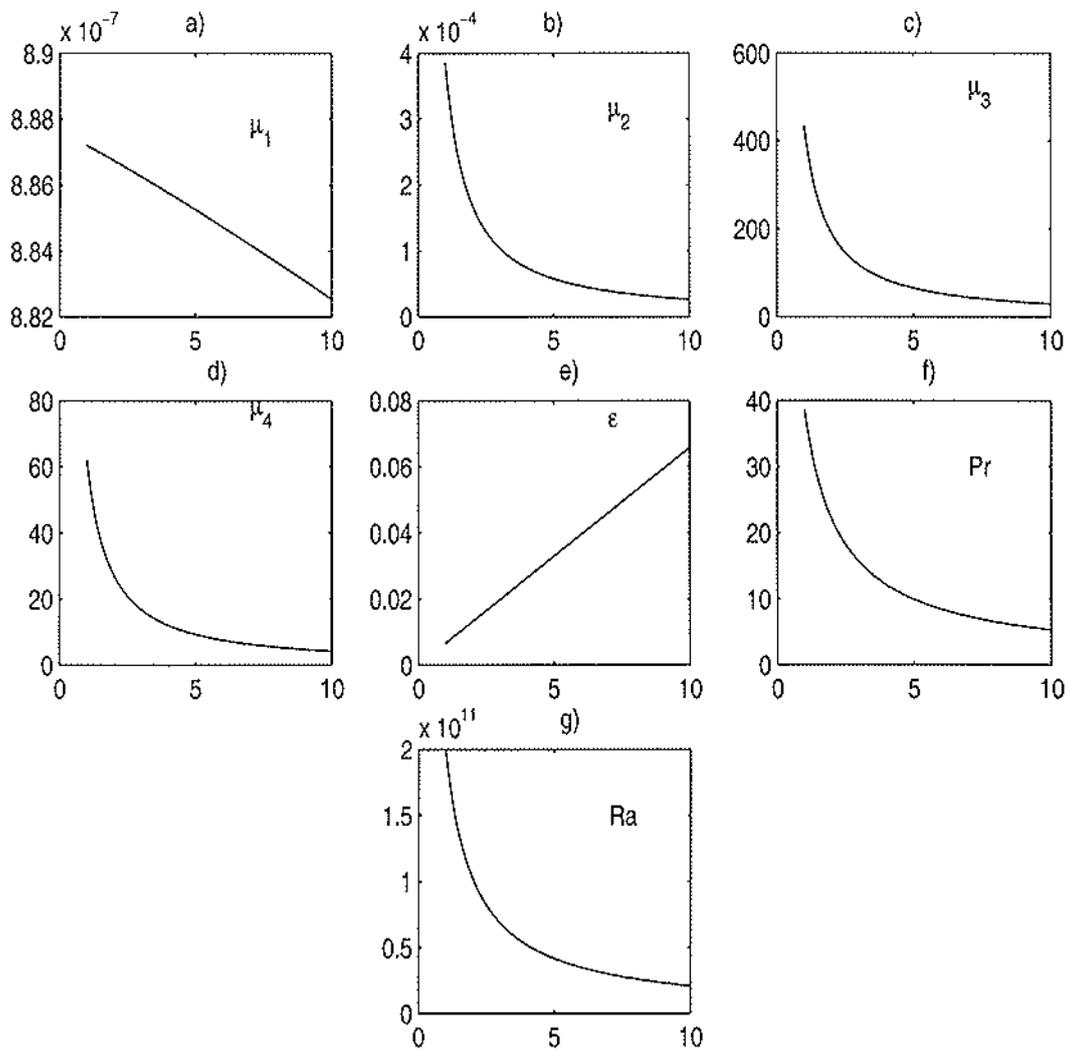


FIG. 3.6 – Variations des 7 paramètres sans dimension de MALKUS en fonction de l'écart à la température critique $T_o - T_c$, pour une cellule de 1 cm. La plaque froide est à T_c , T_o est la température de référence. C'est la température au centre pour une différence de température $\Delta T = 2(T_o - T_c)$ entre le haut de la cellule (à T_c) et le bas (à $2T_o - T_c$).

une expansion telle que cet élément fait subir une compression adiabatique au reste du fluide : c'est l'effet piston [10, 11]. A volume constant, où il apparaît un transport de l'énergie par des ondes sonores dues à la compression adiabatique, des simulations numériques ont déjà montré l'influence de cet effet sur les régimes transitoires. Par exemple, cela a pour effet d'homogénéiser beaucoup plus rapidement un fluide supercritique lorsqu'on veut l'amener à une certaine température en absence de convection. Le rôle que joue ce phénomène sur les petites échelles de la convection n'est pas clair, mais cela pourrait changer les lois du transport convectif turbulent.

Pour mener à bien une expérience qui réponde à cette question, il faudrait pouvoir contourner le problème de la variation simultanée du nombre de PRANDTL et de RAYLEIGH, ce qui nécessite sans doute l'utilisation de paramètres adimensionnés plus adaptés. De plus, du fait de l'extrême sensibilité de ces systèmes aux variations de température, une étude des propriétés du transport convectif dans un fluide supercritique à volume constant demande un contrôle très précis des températures. Le dispositif que nous présentons ci-après ne nous permet pas un tel contrôle. De telles mesures sortiraient d'ailleurs du cadre cette thèse. Notre dispositif constitue plutôt une expérience préliminaire sur l'étude des fluctuations globales dans de tels fluides.

Description de la cellule III.

Ce dispositif repose essentiellement sur une cellule de CO_2 conçue par Y. Garrabos et son équipe à l'ICMCEB. Cette cellule est composée d'un bloc de cuivre, de dimensions 3 cm X 3 cm X 2 cm, dans lequel a été creusé un cylindre de 1 cm de diamètre où est enfermé 0,78 cm³ de CO_2 entre 2 fenêtres transparentes de saphir de 1 cm d'épaisseur (cf figure 3.7). Le remplissage a été effectué à densité critique c'est à dire tel que l'on puisse atteindre le point critique : $\rho_c = 467,8 \text{ kg/m}^3$, $p_c = 7,376 \text{ MPa}$, à la température critique $T_c = 304,13 \text{ K}$.

Comme le montre la figure 3.7 nous n'avons pas employé cette cellule dans la configuration habituelle présentée précédemment. En effet, pour faciliter les mesures optiques, nous avons placé verticalement les fenêtres de saphir, de sorte que le chauffage par une feuille résistive *Minco* connectée à une alimentation en tension continue *HP E3630A*, ne s'effectue pas par une paroi plane. Tant que la masse de cuivre autour du fluide est suffisamment importante, la température à la paroi reste fixe et évolue linéairement en $z = R \cdot \cos(\theta)$, avec R le rayon du cylindre et θ l'angle entre un point de circonférence du cylindre et l'axe verticale Oz . On sait qu'un écoulement sous forme d'un seul rouleau est grandement facilité dans une telle configuration³.

Capteurs et mesures

La cellule de CO_2 nous a été fournie avec trois thermistances *Thermobeads series B10*. Il y en a une au centre de la cellule, une autre est placée au sommet insérée dans la paroi, la troisième est en bas mais entièrement dans le fluide. Deux capteurs de pression y sont également incorporés. L'un est un capteur dynamique piézoélectrique *Kistler* qui donne les fluctuations jusqu'à des fréquences

3. Par exemple, dans une telle configuration, l'analyse de stabilité montre qu'un rouleau apparaît dès que le nombre de RAYLEIGH est différent de zéro, avec le cas idéal des parois glissantes.

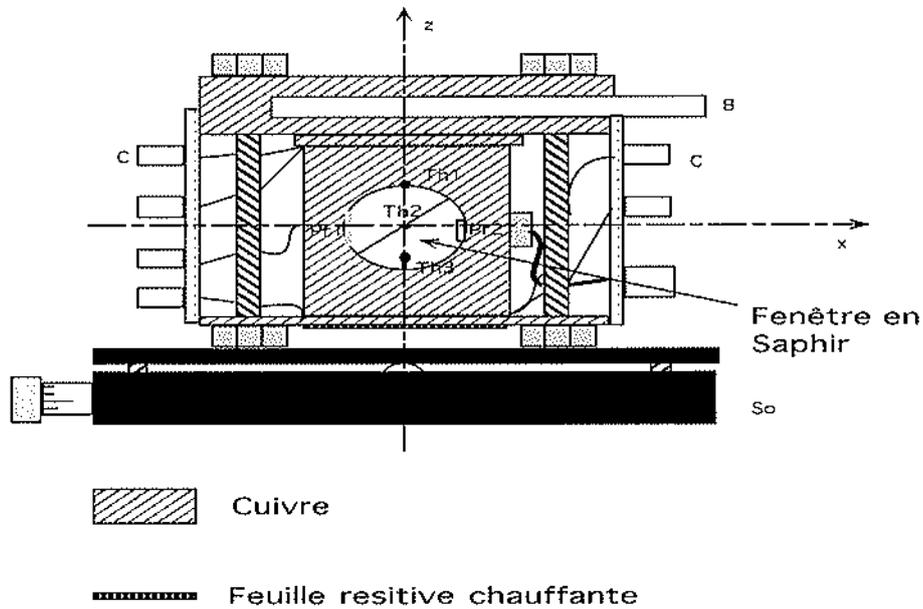


FIG. 3.7 – Schéma de la cellule III. Une cellule cylindrique a été aménagée dans un bloc de cuivre. Le volume contenant le CO_2 , sous une pression de 70 bars environ à température ambiante, est fermé par deux fenêtres de saphir. Ce matériau a été choisi du fait de sa très bonne conductivité thermique (proche de celle du cuivre). Cette cellule nous a été fournie avec les trois thermistances THERMOBEADS Th1, Th2 et Th3 et deux capteurs de pression Pr1 et Pr2. Le capteur ENTRAN Pr2 peut mesurer la composante continue de la pression contrairement au capteur KISTLER Pr1 qui est uniquement dynamique. Le chauffage se fait par une feuille résistive MINCO. Le refroidissement est assuré par une circulation d'eau B reliée à un bain thermique LAUDA RC 6. Le tout repose sur un support optique NEWPORT permettant de régler l'horizontalité. Le bon contact thermique entre les différents éléments est assuré par de la graisse thermo-conductrice.

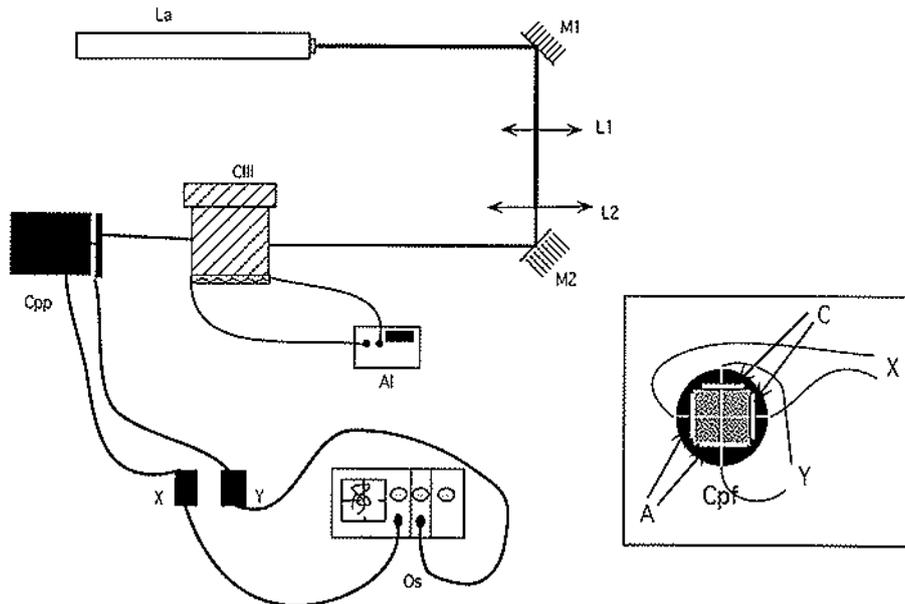


FIG. 3.8 – Schéma du principe de la mesure de fluctuation d'indice dans la cellule III. Un laser à Argon stabilisé SPECTRA PHYSICS 2014 (La) peut créer un faisceau de longueur d'onde $\lambda = 514\text{nm}$ et d'une puissance d'utilisation de 200 mW. Les lentilles L1 et L2 concentrent le faisceau en un rayon parallèle et fin, pour diminuer l'effet de la diffusion près du point critique. Les miroirs M1 et M2 permettent de diriger le faisceau vers la cellule III (CIII). La déflexion du faisceau lors de la traversée de la cellule, est mesurée par le capteur de position Cpp dont le signal est amplifié par les amplificateurs UDT 301 DVI avant d'être envoyé vers l'oscilloscope LE CROY. La partie du capteur de position où se trouve la surface ionisable par le spot laser est représentée en médaillon. A et C repèrent respectivement les anodes et les cathodes perpendiculaires aux deux directions de mesure.

pouvant atteindre 10 kHz. L'autre est un capteur ENTRAN EPB 319 W qui laisse passer la composante continue du signal. C'est un pont de résistances dont une résistance est sensible à la fois au fluctuation de pression et de température alors que dans l'autre branche du pont est placée une résistance sensible aux seules variations de température, de sorte que le pont n'est déséquilibré que par les variations de pression. Ce capteur a été utilisé pour étudier la réponse de pression à la paroi aux variations de température en un point du volume. Il a fait l'objet d'étalonnages précis [12].

Cette cellule a été placée dans le dispositif optique très simple décrit figure 3.8. On y mesure grâce à un capteur de position XY⁴ Model 1233, la position du faisceau dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation, c'est la variation au cours du temps de la déflexion du faisceau laser traversant la cellule. L'angle de déflexion est directement relié à l'indice optique du milieu traversé, dont on connaît donc les fluctuations au cours du temps. C'est une mesure globale puis-

4. Le principe en est simple, le faisceau laser ionise quelques atomes de la surface du capteur. On déduit cette position en mesurant le temps que mettent les électrons ainsi libérés pour atteindre une anode (cf le médaillon de la figure 3.8).

qu'intégrée sur toute la longueur de la cellule. Les fluctuations du gradient de température, liées aux fluctuations de l'indice optique, sont ainsi mesurées dans les deux directions perpendiculaires au faisceau c'est à dire dans la direction Oz parallèle au flux thermique moyen, et transversalement à cette direction. Les signaux issus du capteur de position sont : soit observés sur deux voix d'un oscilloscope *LeCroy 9374 L*, soit directement enregistrés par la carte d'acquisition *AT-MIO 16X*. Avec un dispositif analogue, si on éclaire maintenant la cellule avec un faisceau plus large et qu'avec une lentille on fait l'image d'un plan verticale de la cellule, on y voit clairement les plumes thermiques. On peut même y suivre leur mouvement d'ensemble. Cela nous informe de la présence d'un écoulement moyen ou pas.

Lien entre les fluctuations de la déflexion du faisceau laser et les fluctuations de température dans un gaz.

D'après le principe de FERMAT, le chemin optique suivi par un rayon lumineux dans un milieu d'indice variable sera extremum. C'est à dire que si $\{x,y,z\}$ repèrent la position du faisceau, il sera tel que :

$$\delta \int n(x, y, z) dl = 0 \quad (3.7)$$

où $n(x, y, z)$ est l'indice optique du milieu au point considéré et l est l'abscisse curviligne du faisceau donc : $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Cette équation est équivalente au système [13] :

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \left\{ 1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right\} \left(\frac{1}{n} \partial_x n - \frac{dx}{dy} \frac{1}{n} \partial_y n \right) \quad (3.8a)$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \left\{ 1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right\} \left(\frac{1}{n} \partial_z n - \frac{dz}{dy} \frac{1}{n} \partial_y n \right) \quad (3.8b)$$

Si le faisceau incident arrive sur le milieu parallèlement à Oy (cf figure 3.9), alors il est raisonnable de dire que, si ce milieu est un gaz, les variations selon x et z seront lentes, et donc $\frac{dx}{dy}$ et $\frac{dz}{dy}$ seront petits devant 1, ce qui ne sera pas nécessairement le cas de $\frac{1}{n} \partial_x n$. On a donc

$$\frac{d^2x}{dy^2} \approx \frac{1}{n} \partial_x n \quad (3.9a)$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} \approx \frac{1}{n} \partial_z n. \quad (3.9b)$$

En intégrant ces équations sur la longueur l de la cellule on obtient la tangente de l'angle entre la direction du faisceau et Oy à la sortie de la cellule. Ainsi le capteur de position donne (cf figure 3.9)

$$X(t) \approx L \int_l \frac{1}{n} \partial_x n dy \quad (3.10a)$$

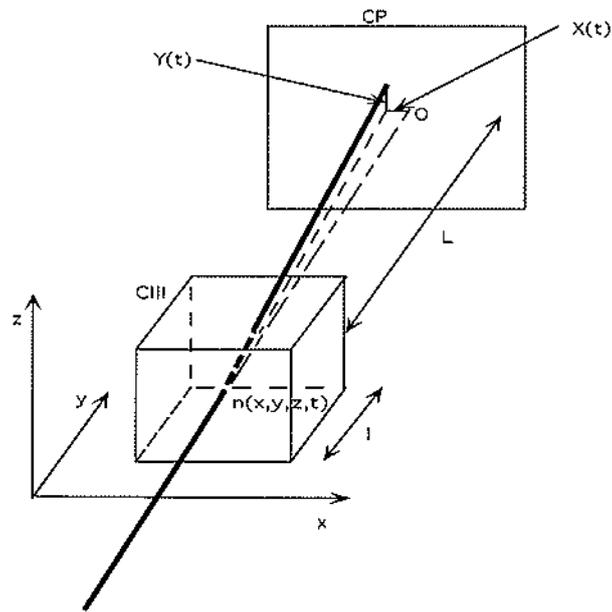


FIG. 3.9 – Schéma représentatif de la déflexion d'un faisceau lumineux au travers de la cellule III (CIII) d'indice variable $n(x, y, z, t)$. l est la longueur de la cellule et L est la distance de la cellule au capteur de position CP. On a $L \gg l$. $X(t)$ et $Z(t)$ donnent la position du faisceau lumineux dans le plan du capteur par rapport à la position O qu'il aurait sans déflexion lors de la traversée de la cellule.

$$Z(t) \approx L \int_1^1 \frac{1}{n} \partial_x n \cdot dy \quad (3.10b)$$

avec L la distance de la cellule au capteur de position.

Par ailleurs, on peut écrire la relation de CLAUSIUS-MOSSOTI [13] :

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{2}{3} \rho K(\nu) \quad (3.11)$$

où $K(\nu)$ est la constante de GALSTONE-DALE. C'est une fonction de la fréquence de l'onde incidente. Pour un gaz, l'indice optique est proche de 1. On peut donc linéariser (3.11) avec $n^2 - 1 \approx 2(n - 1)$ et $n^2 + 2 \approx 3$. De plus, en utilisant les approximations de BOUSSINESQ dans l'équation (3.6a) on trouve tout simplement les relations :

$$X(t) \approx L\alpha \int_1 \partial_x T dy \quad (3.12a)$$

$$Z(t) \approx L\alpha \int_1 \partial_z T dy \quad (3.12b)$$

Notons enfin que la grandeur globale qu'est le module du flux conductif de chaleur, $\mathbf{Q}_c = -\lambda \nabla T$, intégré dans la direction Oy sur la longueur de la cellule, s'écrit :

$$\| \langle \mathbf{Q}_c \rangle_t(t) \| = -\frac{\lambda}{L\alpha} \sqrt{X^2(t) + Y^2(t)}. \quad (3.13)$$

Toutefois, si cette méthode a déjà été utilisée avec profit [14], on peut s'interroger sur la possibilité de l'étendre au CO_2 supercritique. Au vu des faibles déviations observées dans notre expérience, l'approximation, qui consiste à négliger les variations transverses du rayon lumineux dans les équations (3.9), se justifie encore. Par ailleurs, près du point critique, bien que la diffusion soit importante, on trouve dans la littérature un indice optique critique n_c qui vaut pour le CO_2 à 1 K de T_c $n_c = 1,1074$ pour la longueur d'onde que nous avons utilisée [15]. L'erreur due à la linéarisation de (3.11) n'est alors que de 2%. Mais il reste les remarques faites précédemment sur les approximations de BOUSSINESQ dans un fluide supercritique à volume constant.

3.3 Résultats expérimentaux sur les fluctuations de grandeurs globales en convection turbulente.

Les dispositifs présentés ci-avant, nous ont permis d'effectuer les mesures des fluctuations de différents types de grandeurs globales. Les fils de platine dans la cellule I nous ont donné les fluctuations de la température moyennée sur une ligne, alors que les mesures de la déflexion du faisceau laser traversant la cellule III sont reliées aux fluctuations des gradients de température dans les deux directions perpendiculaires au faisceau, intégrés sur une ligne. Les quatre paires

de thermocouples de la cellule II fournissent une estimation des fluctuations de la différence de température moyenne des plaques supérieure et inférieure. Les capteurs de flux installés dans les cellules I et II nous donnent le flux thermique moyen traversant la cellule. Comme nous l'avons montré en introduction, c'est aussi la puissance injectée. Parallèlement, la cellule II nous a permis d'envisager la mesure de la vitesse des plumes par décalage DOPPLER. C'est à l'étude des résultats de ces mesures à laquelle nous allons nous consacrer maintenant.

3.3.1 Etalonnage des capteurs de flux thermique et loi de puissance entre le nombre de NUSSELT et de RAYLEIGH dans les cellules I et II.

Dans la cellule I, très bien isolée par un vide secondaire et où l'on chauffe le fluide avec une résistance chauffante, on connaît le flux thermique traversant la cellule en calculant la puissance fournie à la résistance. On peut donc s'en servir pour étalonner les capteurs de flux en traçant, comme sur la figure 3.10, le flux mesuré par ces trois capteurs en fonction de la puissance fournie à la résistance. On y constate que les trois capteurs de flux mesurent en moyenne un flux plus faible que celui imposé par la résistance. Cela peut s'expliquer par la modification locale de la résistivité thermique de la plaque chauffante due à la présence des capteurs de flux eux-mêmes et par les pertes par rayonnement thermique de la plaque chaude. De plus, même une fois prise en compte la sensibilité annoncée par le constructeur, ils ne croissent pas de façon identique lorsqu'on augmente la puissance dans la résistance. Pour deux capteurs, on a même une croissance non linéaire avec des lois de puissance d'exposants 0,94 et 0,92. Ces écarts à la linéarité sont suffisants pour fausser la loi entre nombre de NUSSELT et de RAYLEIGH, si on cherchait à l'établir à partir de ces capteurs sans tenir compte de cette correction. La figure 3.11 montre qu'une fois celles-ci prises en compte, on retrouve un bon accord avec la loi en $2/7$ puisque l'écart relatif à cette loi est inférieur à 3% quelque soit le capteur. L'accord est moins bon avec la loi en $1/3$ (l'écart relatif à cette loi est alors de 4 à 4,7%). En fait, sur la gamme de nombre de RAYLEIGH qui nous est accessible, on a ici plutôt $Nu \propto Ra^{0,25}$.

Dans la cellule II où l'on ne chauffe pas au moyen de résistances chauffantes, on peut tester la linéarité des capteurs en imposant un gradient stable de température entre le haut et le bas de la cellule. Dans un tel régime conductif, le flux thermique doit être proportionnel au gradient de température. Cette méthode est moins fiable que la précédente à cause des pertes latérales de flux. Pour les minimiser nous avons imposé le gradient de manière à garder le centre de la cellule à la température de la pièce afin que les pertes et les gains de flux à travers la paroi latérale, se compensent. De plus, on ne peut pas atteindre la même gamme de flux thermique en conduction et en convection, cette dernière permettant un transport beaucoup plus efficace de la chaleur. Cependant, on trouve ainsi le flux en haut (F_h) et le flux en bas (F_b) proportionnels à $\Delta T^{0,92}$ en transport conductif.

Compte-tenu de ces corrections, on obtient figure 3.12 un accord raisonnable avec une loi en $Nu \propto Ra^{0,25}$. Signalons toutefois que l'alignement des deux séries de points, mesurés dans les différentes cellules, n'est obtenu qu'en multipliant les nombres de NUSSELT mesurés pour la cellule I par 2. La différence de rapport d'aspect n'explique sans doute pas seule cet écart important du

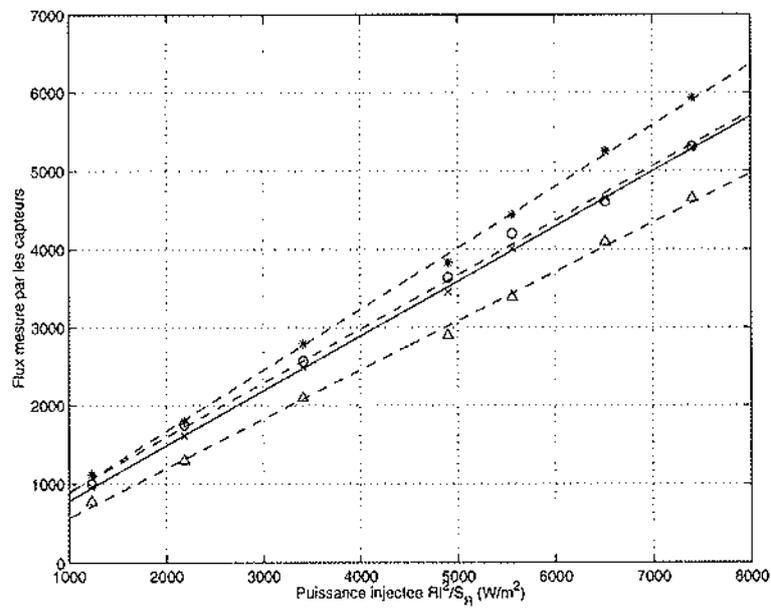


FIG. 3.10 — Etalonnage des capteurs de flux. On représente le flux moyen mesuré par les trois capteurs de la cellule I (*), (o), (Δ), ainsi que leur interpolation linéaire. Les croix représentent la moyenne des trois capteurs. Les mesures pour les capteurs repérés par (*) et (o) ne croissent pas de manière tout à fait linéaire, on a $(RI^2/S_R)^{0.94}$ pour les asterisques et $(RI^2/S_R)^{0.92}$ pour les cercles.

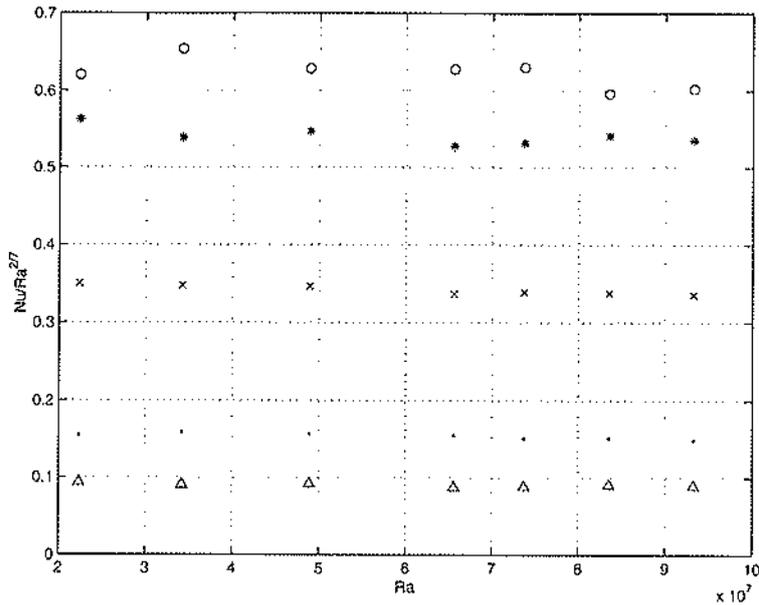


FIG. 3.11 – Lois d'échelle entre nombre de NUSSELT et nombre de RAYLEIGH dans la cellule I. Les estimations à partir des mesures issues des trois capteurs sont symbolisées par (*), (o), (Δ). Les croix correspondent aux estimations à partir de la valeur moyenne des trois capteurs. Les points correspondent aux estimations à partir de la puissance fournie à la résistance chauffante.

pré-facteur de la loi de puissance. On peut invoquer aussi des pertes et des fuites thermiques, par la conduction à travers les parois latérales, différentes dans les deux cellules, ou une estimation plus ou moins bien approchée de la différence de la températures des surfaces au contact du fluide⁵. Vu les modifications locales de la conductivité qu'amènent les capteurs de flux, la différence du rapport de la surface des capteurs sur surface totale de la plaque, joue peut-être aussi un rôle sur l'écart constaté. En effet, plus ce rapport sera petit, moins on mesure le flux exact traversant la paroi. Cependant, la différence de conductivité restant la même, il est raisonnable de penser qu'on mesure toujours le même taux du flux thermique réel, et dans ce cas, seul le pré-facteur des lois d'échelle est modifié. Enfin, si les premiers points des cellules I et II sont moins bien alignés c'est parcequ'ils correspondent à des mesures avec de faibles gradients thermiques. On est donc plus sensibles aux fluctuations extérieures.

Bien que ce ne soit pas l'objet de cette étude, nous avons constaté que la détermination précise d'une loi empirique, si elle existe, $Nu = Ra^\gamma$, est assez délicate. Nous avons pu remarquer par exemple que l'existence d'un vide d'isolement et d'un écrantage thermique ne sont pas des luxes inutiles. Les effets des conditions aux limites et du rapport d'aspect mériteraient d'être étudiés. A ce titre, nous avons pu constater l'effet de parois latérales conductrices, qui, en créant un flux thermique horizontal dans les parois inférieure et supérieure, modifient beaucoup le transport de la chaleur par le fluide. L'utilisation de valeurs numériques rapportées à une température moyenne

5. Une distance entre résistance platine et l'interface du liquide différente dans les deux cellules, ou un mauvais contact thermique de l'une des résistances, peuvent fausser cette mesure du ΔT .

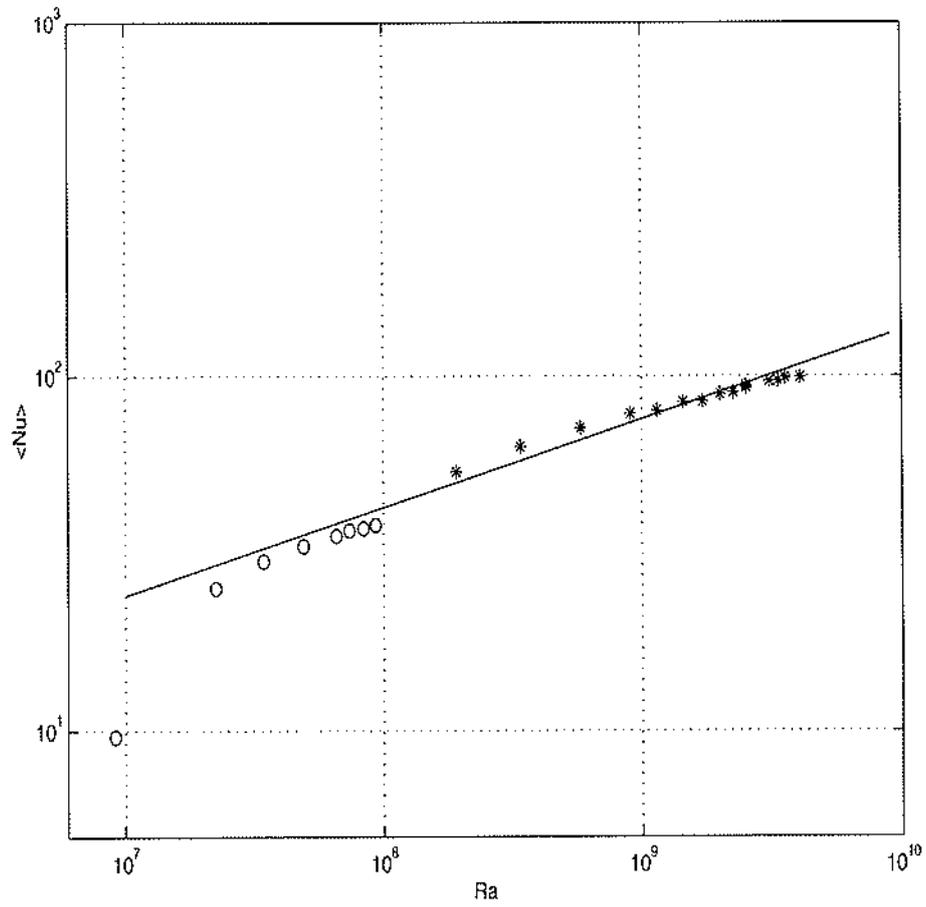


FIG. 3.12 - Variation du nombre de NUSSELT en fonction du nombre de RAYLEIGH dans les cellules I (o) et II (*). La ligne continue représente une loi en $Nu \propto Ra^{0.25}$.

T_o pour les paramètres du fluide, peut aussi poser un problème dans certains cas (pour de grands ΔT notamment). Ainsi, la loi en $\gamma = 2/7$, qui s'était "imposée" ces dernières années sur une grande plage de Ra , semble remise en question [16], ce qui semble montrer la nécessité de mesures additionnelles. Heureusement, en ce qui nous concerne, la détermination des fluctuations temporelles de flux thermique et sa comparaison avec le flux moyen, ne dépend pas de celle de la loi $Nu = f(Ra)$. Notons toutefois que, d'après la théorie présentée dans cette dernière référence [16], il est bien prévu un exposant de $\gamma = 1/4$ dans la gamme de nombres de RAYLEIGH qui nous est accessible (cf figure 1 de la référence [16] avec $Pr \approx 7$ et $10^7 \leq Ra \leq 10^9$).

3.3.2 Fluctuations de la température et de ses gradients moyennés sur une ligne.

Fluctuations de la température intégrée sur une ligne dans la cellule I.

Aspects statistiques des fluctuations

Rappelons que dans la cellule I, nous avons tendu un fil de platine au centre qui nous donne la température sur une ligne au milieu de la cellule $\langle T_m \rangle_L$ et trois fils parallèles montés en série à trois millimètres de la plaque supérieure froide qui nous donnent la température intégrée sur trois lignes en haut de la cellule $\langle T_h \rangle_L$ (cf figure 3.2). Regardons dans un premier temps l'évolution des fluctuations lorsqu'on augmente le nombre de RAYLEIGH. En suivant le théorème central limite pour une longueur de corrélation l_c , on s'attend à observer des fluctuations relatives d'une grandeur moyennée sur une ligne en $\sigma(\langle A \rangle_L) / \langle A \rangle_L = \sqrt{l_c/D}$, avec D le diamètre de la cellule.

Il reste à exprimer l_c en fonction du paramètre de contrôle : le nombre de RAYLEIGH. Faisons, dans un premier temps, l'hypothèse que l_c est proportionnel à l'échelle dissipative visqueuse l_d . Implicitement, cela revient à supposer que c'est le champ de vitesse turbulent qui fixe la longueur de corrélation, en mélangeant les inhomogénéités de température. On peut alors utiliser le même raisonnement que celui présenté pour le cas de l'écoulement de VON KÁRMÁN, qui conduit à un rapport $l_d/D \propto Re^{-3/4}$. Si on prend comme vitesse caractéristique $\sqrt{g\alpha\Delta TH}$, on a alors⁶ $Re \propto Ra^{1/2}$ et donc $l_d/D \propto Ra^{-3/8}$. Avec une longueur de corrélation proportionnelle à l'échelle de TAYLOR, λ_T , on trouve $\lambda_T/D \propto Ra^{-1/4}$. Mais on peut aussi supposer la longueur de corrélation proportionnelle à l'épaisseur de la couche limite thermique : $e_c = (2Ra_c/Ra)^{1/3} H$, introduite précédemment et qui amène à une loi en $e_c/D \propto Ra^{-1/3}$. Toutes ces hypothèses conduisent à une décroissance des fluctuations relatives d'une variable intégrée sur une ligne en $\sigma(\langle A \rangle_L) / \langle A \rangle_L = Ra^{-\gamma}$ avec $\gamma = \{1/8, 1/6, 3/16\}$ selon que l'on choisit $l_c = \lambda_T$, $l_c = e_c$ ou $l_c = l_d$. Notons dès à présent qu'il sera difficile expérimentalement de différencier ces deux derniers exposants dont les valeurs sont proches (0,167 et 0,187).

Cependant, les raisonnements ci-dessus ne tiennent pas compte du fait, qu'en augmentant le nombre de RAYLEIGH, on augmente la différence de température et, par conséquent, on élargit le

6. Cette loi est très proche des résultats expérimentaux en $Re \propto Ra^{0,49}$ [6, 3]

domaine dans lequel la température peut fluctuer. Ainsi pour le fil au milieu, qu'on s'est efforcé de garder à une température moyenne constante, $\sigma(\langle T_m \rangle_L)$ ne décroît pas avec le nombre de RAYLEIGH. Pour prendre en compte cet effet, on doit s'intéresser aux fluctuations de la température en un point de la cellule. Au centre, les mesures réalisées en un point montrent que $\sigma(T_m) \propto \Delta T^{0,85}$ [6]. Donc une fois moyennée sur une ligne, on devrait trouver $\sigma(\langle T_m \rangle_L) / \langle T_m \rangle_L \propto Ra^{0,85-\gamma}$. En haut, on s'attend à ce que les fluctuations de température près de la couche limite supérieure soient plus sensibles au refroidissement de la plaque qu'elles ne le sont au centre. Si en un point près de la couche limite on suppose $\sigma(T_h) \propto \Delta T$, alors on a $\sigma(\langle T_h \rangle_L) / \langle T_h \rangle_L \propto Ra^{1-\gamma}$

La figure 3.13 montre les variations avec le nombre de RAYLEIGH des fluctuations relatives de $\langle T_m \rangle_L$ et $\langle T_h \rangle_L$ respectivement divisées par $Ra^{0,85-\gamma}$ et $Ra^{1-\gamma}$ avec $\gamma = \{1/8, 1/6, 3/16\}$. On y constate une évolution des fluctuations relatives, pour le fil d'en haut, très proche de la couche limite thermique, et au centre de la cellule, qui semblent compatibles avec toutes les longueurs de corrélation que nous avons considérées dans nos raisonnements ci-dessus. Il est notamment difficile trancher entre longueur de dissipation visqueuse et épaisseur de couche limite thermique sur la gamme des nombres de RAYLEIGH accessible dans la cellule I. Notons également que les résultats obtenus sont moins bons lorsqu'on utilise une loi en $Ra^{0,85-\gamma}$ pour $\langle T_h \rangle_L$. Enfin, rappelons que le théorème central limite, invoqué implicitement ici, implique la convergence des PDF des fluctuations vers la gaussienne.

Regardons donc maintenant la forme des PDF des fluctuations de $\langle T_m \rangle_L$ et $\langle T_h \rangle_L$ données figure 3.14. On constate qu'au centre ces fluctuations sont symétriques alors que près de la plaque supérieure celles-ci sont dissymétriques. Cette dissymétrie peut s'expliquer par le fait que la température en haut est plus contrainte par la température de la plaque froide puisque, contrairement au centre, la moyenne de la température près de la couche limite thermique supérieure est plus proche de la température de cette plaque froide que de celle du bas la cellule. Autrement dit, le domaine possible de fluctuation n'est pas symétrique autour de la valeur moyenne. Une fois normalisées par leurs écarts types les PDF des fluctuations se superposent bien pour les différents nombres de RAYLEIGH. Nous reviendrons sur la forme des PDF de température près de la couche limite thermique supérieure lorsque nous considérerons les fluctuations du flux thermique. De manière plus quantitative, on s'intéresse figure 3.15 aux écarts par rapport à la gaussienne des facteurs de dissymétrie et d'applatissage pour nos deux mesures intégrées de température. On n'y voit pas une tendance vers la gaussienne contrairement aux prévisions s'appuyant sur théorème central limite. Au contraire la valeur du facteur d'applatissage semblerait s'écarter de plus en plus de celle de la gaussienne. Ces résultats, obtenus pour des températures intégrées sur une ligne, sont qualitativement proches de ceux obtenus pour des mesure de fluctuations en un point (figure 3 7a) ou 12 de la référence [6]). Dans notre cas cependant, en haut comme au centre, les facteurs de dissymétrie et d'applatissage, semblent un peu plus près de la gaussienne.

Aspect temporel des fluctuations.

Les puissances spectrales des fluctuations sont représentées figure 3.16. Les amplitudes de la deuxième courbe ont été divisées par 10 pour faciliter la comparaison. On s'est limité à des fréquences d'acquisition relativement basses (4 Hz) car on ne s'attend pas à une dynamique parti-

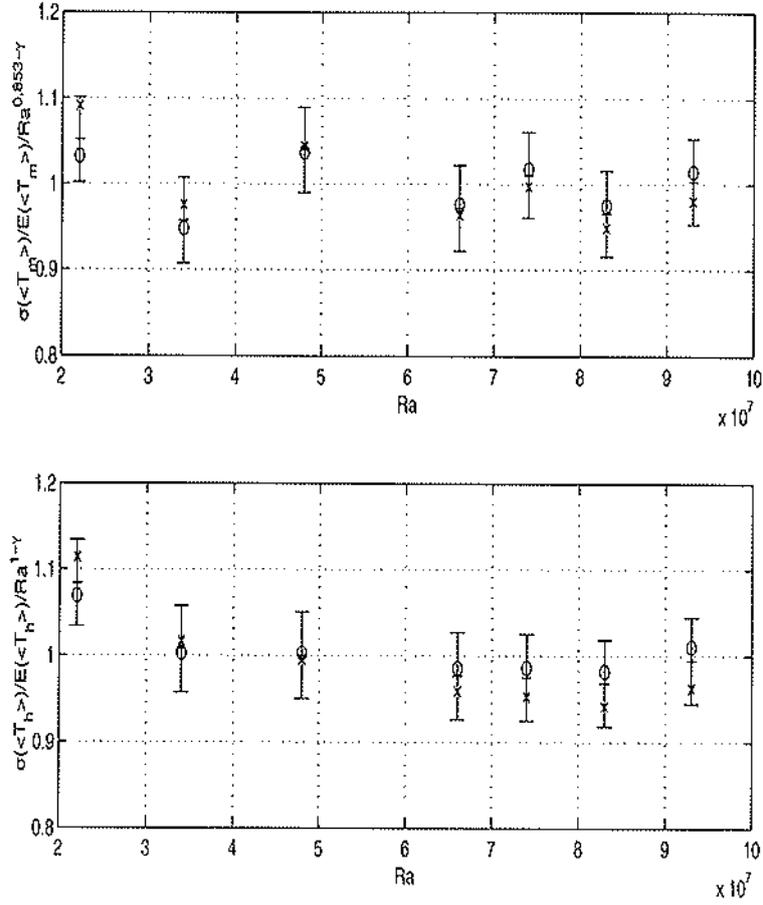


FIG. 3.13 – Lois de puissance pour les fluctuations relatives de la température moyennée sur une ligne au milieu de la cellule, courbes A), et au niveau de la couche limite thermique supérieure, courbe B). On a testé des lois en $Ra^{0,853-\gamma}$ pour les fluctuations relatives de $\langle T_m \rangle_L$ (courbe A) et $Ra^{1-\gamma}$ pour les fluctuations relatives de $\langle T_h \rangle_L$ (courbe B), avec $\gamma = 1/6$ (+), $3/16$ (o) et $1/8$ (x). Sur la figure, toutes les lois d'échelle ont été ramenées autour de 1 pour faciliter leur comparaison. Les barres d'erreur ne sont représentées que pour $\gamma = 1/6$ et sont du même ordre pour les autres lois d'échelle.

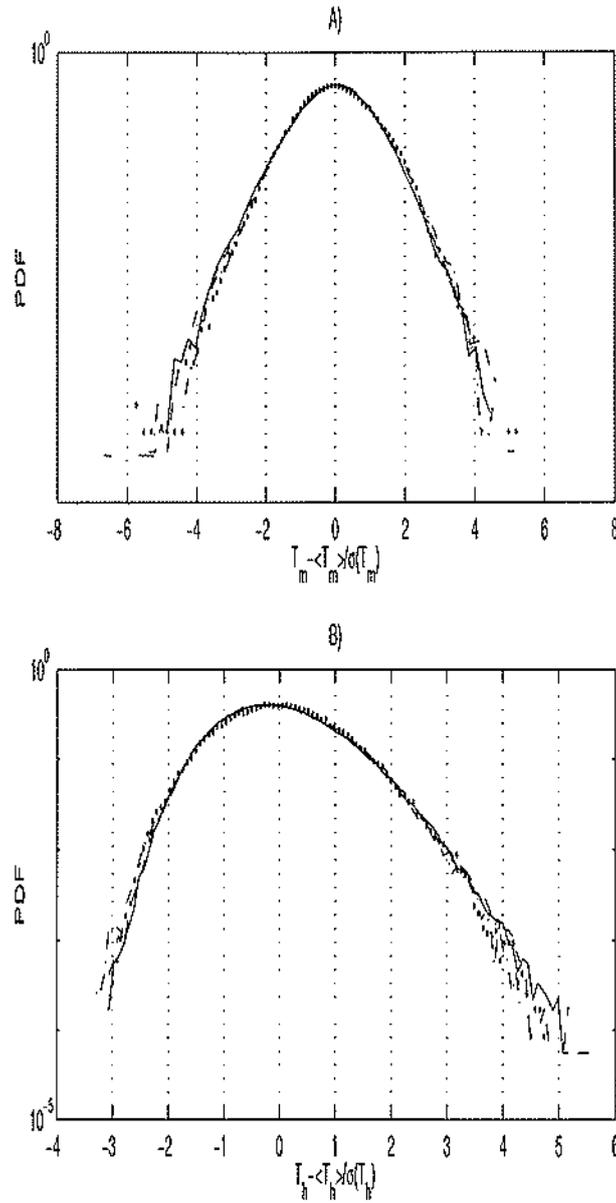


FIG. 3.14 -- Superposition des PDF des fluctuations, normalisées par leur écart type, de la température intégrée sur une ligne au centre de la cellule courbe A) et près de la couche limite thermique de la plaque supérieure courbe B). Ces PDF sont tracées pour des nombres de RAYLEIGH de: $Ra = 9,3 \cdot 10^7$ (—), $Ra = 6,6 \cdot 10^7$ (---), $Ra = 3,4 \cdot 10^7$ (- · -) et $Ra = 2,2 \cdot 10^7$ (···).

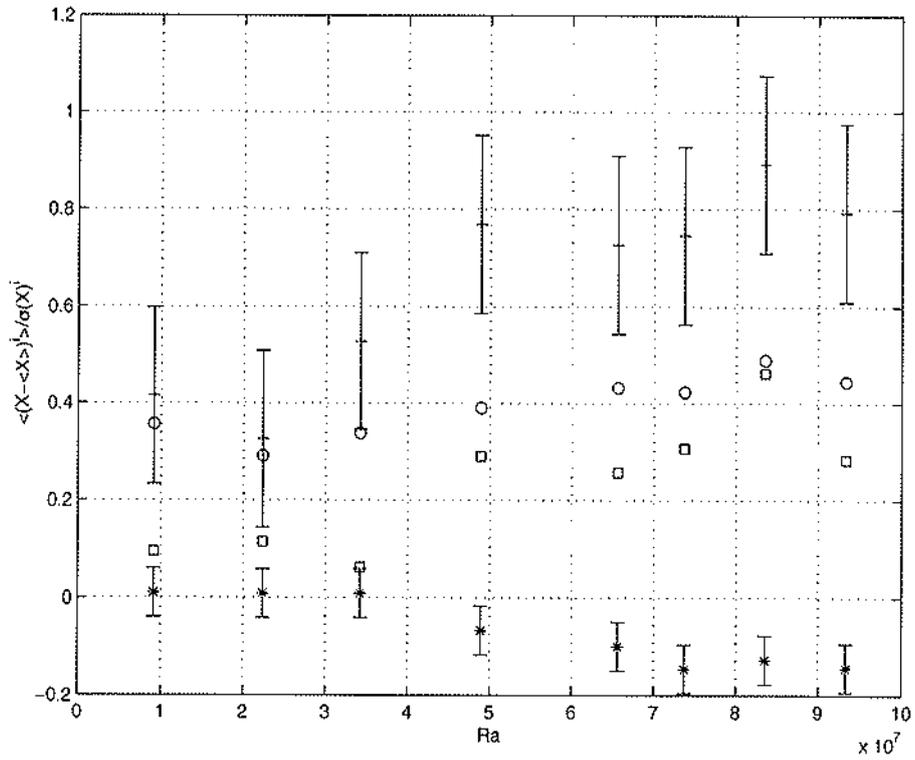


FIG. 3.15 – Evolution avec le nombre de RAYLEIGH des écarts à la gaussienne des facteurs de dissymétric (*) et d’applatissage (+) pour les fluctuations de température au centre de la cellule $\langle T_m \rangle_1$ et des facteurs de dissymétric (o) et d’applatissage (□) pour $\langle T_h \rangle_1$. Les barres d’erreurs sont du même ordre pour les mesures au centre et en haut, où elles n’ont pas été représentées. On a ramené le facteur d’applatissage autour de 0 en lui retranchant 3, la valeur qu’il prend pour une gaussienne.

culièrement rapide des grandeurs globales en convection (cf TABLEAU III). De plus, ces mesures ont été faites simultanément avec celles du flux dont les capteurs ont un temps de réponse relativement grand. Mais jusqu'à cette fréquence d'acquisition, on constate cependant une décroissance plus rapide des fluctuations sur les fils à trois millimètres de la plaque supérieure. Si on essaie de caractériser cette décroissance par des lois de puissance, on trouve un exposant $-4,5 \pm 0,5$ près de la couche limite thermique supérieure alors qu'au centre il vaut $-2,5 \pm 0,5$ pour un nombre de RAYLEIGH de $9,3 \cdot 10^7$ correspondant à la figure 3.16. Cela reste vrai aux autres nombres de RAYLEIGH. Cette décroissance du spectre peut s'interpréter comme résultant de discontinuités, aux échelles de fréquence considérées, de la quantité mesurée ou de ses dérivées. Ainsi des discontinuités se produisant aléatoirement conduisent à une puissance spectrale décroissant en ν^{-2} . Pour des discontinuités apparaissant dans la dérivée du signal, la décroissance sera en ν^{-4} . Autrement dit, ici, le signal issu de la couche limite est plus continu que celui du centre où la turbulence est plus développée. Nous reviendrons sur ces résultats lorsque nous considérerons la densité spectrale de puissance du flux thermique.

De plus, remarquons sur cette figure la présence d'un pic à la fréquence de $\nu_c = 34$ mHz. Ce pic ressort également du module du spectre croisé entre nos deux mesures de température. Pour en comprendre l'origine, on peut regarder comment cette fréquence évolue avec le nombre de RAYLEIGH. En particulier, si elle n'en dépend pas, on pourra l'attribuer à un temps caractéristique de la régulation thermique de la plaque supérieure ou des ponts de mesure. Par contre si cette fréquence croît comme $Ra^{1/2}$, on la liera plutôt à une vitesse hydrodynamique. On peut également construire un temps caractéristique de la plaque du bas. En effet, en considérant sa capacité calorifique et la fuite de chaleur par convection on construit le temps $t_{Cu} \approx \rho_{Cu} C_{Cu} e_{Cu} d / (\lambda Nu)$ qui décroît en $Ra^{2/7}$, avec ρ_{Cu} , C_{Cu} , e_{Cu} respectivement la densité, la capacité calorifique et l'épaisseur, de la plaque de cuivre. Aux autres valeurs du nombre de RAYLEIGH, il existe effectivement une fréquence caractéristique plus ou moins bien définie qui semble évoluer avec le nombre de RAYLEIGH. La figure 3.17 montre qu'à la précision de nos mesures, on ne peut pas vraiment trancher entre la loi en $Ra^{1/2}$ et $Ra^{2/7}$. Notons cependant que la vitesse \bar{U} que l'on peut construire à partir de cette fréquence est 10 fois plus faible que celle que l'on peut prévoir en prenant brutalement $\bar{U} \approx \sqrt{g\alpha\Delta T d}$. Cette fréquence est par contre environ deux fois plus grande que $1/t_{Cu}$ et donc, si notre estimation de \bar{U} est correcte, cette fréquence semble plutôt correspondre à la fluctuation de température de la plaque de cuivre du bas. Cependant, nous reviendrons sur cette question en abordant les corrélations entre les mesures de flux thermique et celles de la température près de la couche limite où les choses apparaissent plus clairement. Remarquons pour finir, qu'on retrouve ces fréquences lorsqu'on étudie les temps pour lesquels les fonctions de corrélations croisées entre les fluctuations de température en haut et au centre, sont extremum. Cependant ces extrema sont faibles (i.e. inférieur à 10% quelque soit le nombre de RAYLEIGH). Ces fluctuations sont donc peu corrélées.

Fluctuations des gradients de température moyennées sur une ligne dans la cellule III.

Les mesures que nous avons effectuées dans le CO_2 supercritique sont plutôt à considérer comme les résultats d'un premier montage préliminaire en vu d'une expérience future. Par exemple, le mon-

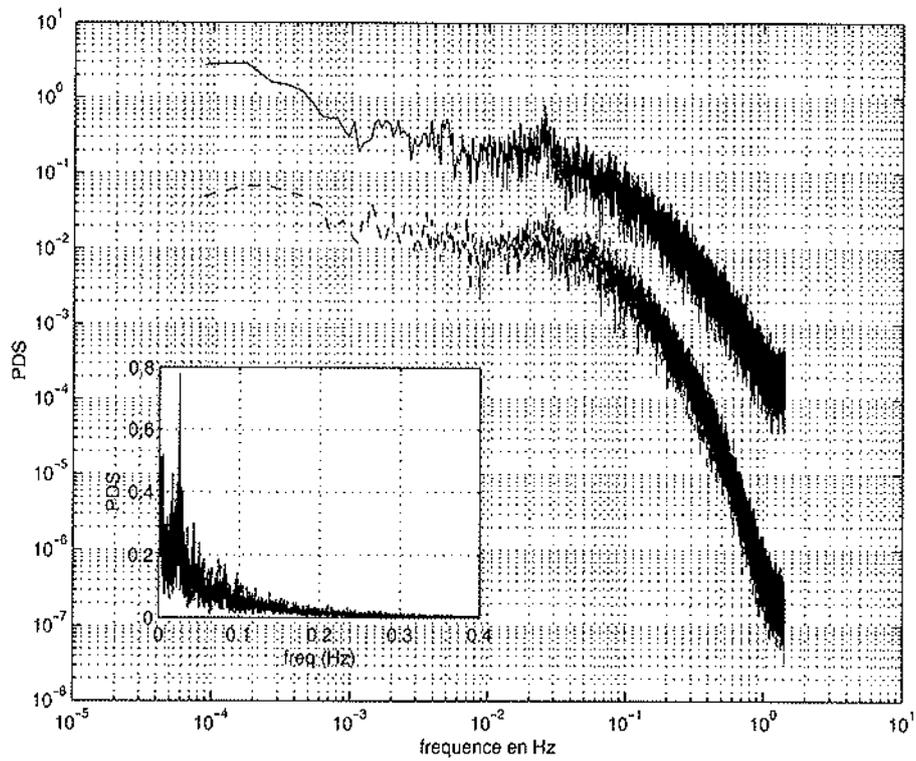


FIG. 3.16 – Densité spectrale de puissance des fluctuations de température intégrée sur une ligne au centre de la cellule (—) et près de la couche limite supérieure (---) pour un nombre de RAYLEIGH de $9,3 \cdot 10^7$. En médaillon est représenté en linéaire la partie basse fréquence du spectre des fluctuations de $\langle T_m \rangle_1$.

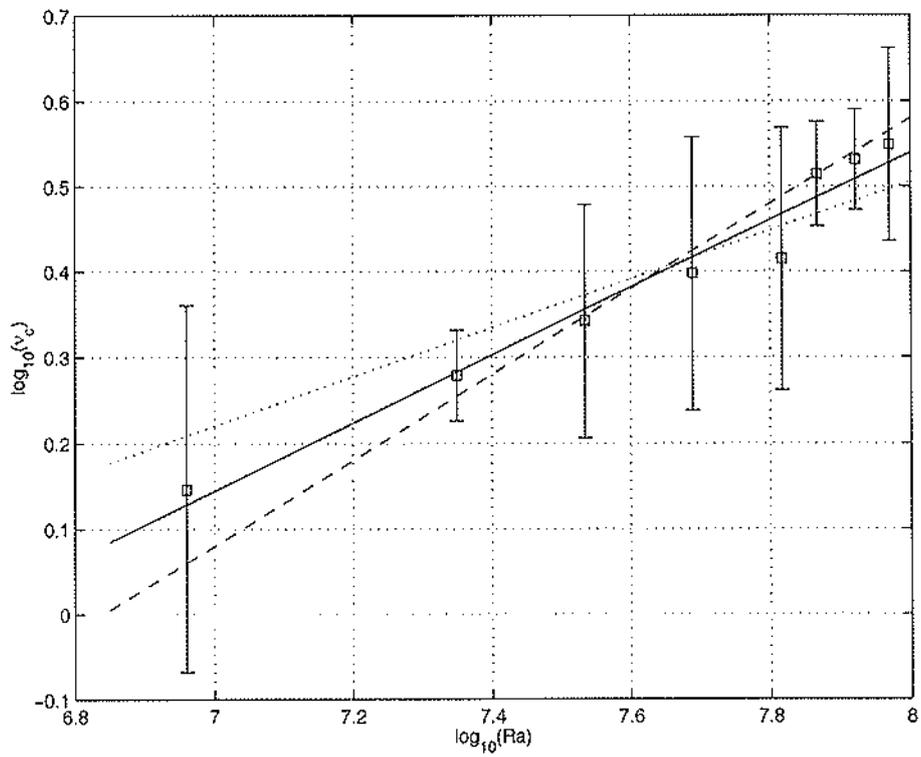


FIG. 3.17 – Représentation logarithmique des fréquences ressortant des modules du spectre croisé entre nos mesures de température intégrée sur un ligne en haut et au centre de la cellule III. L'erreur est évaluée à partir de la largeur des pics. La ligne continue représente la meilleur interpolation linéaire des points expérimentaux. Cela conduit à une loi en $\nu_c = Ra^{0.4}$. Les tirets représentent la loi en $\nu_c = Ra^{1/2}$, les pointillés la loi $\nu_c = Ra^{2/7}$

tage tel qu'il est présenté figure 3.8 ne permet pas de contrôler les pertes latérales de flux thermique. Cependant, les premières observations qualitatives que nous avons faites, sont suffisamment intéressantes pour être exposées ici. Pour les mesures présentées ci-après nous avons procédé comme suit : pour un certain flux thermique (i.e. pour un courant constant dans la résistance) nous avons, dans un premier temps, porté la cellule autour de sa température critique (facilement repérable par l'opalescence critique), puis nous nous en sommes écartés en augmentant la température de la plaque du haut grâce au bain thermique. Ainsi, au vu de la masse de cuivre entourant la cellule, nous espérons faire une série de mesures avec un taux de pertes latérales de flux thermique et un ΔT approximativement constant.

Tant que l'on n'est pas trop proche du point critique, le spot du laser est bien ponctuel sur le capteur de position, et cela a un sens de s'intéresser à sa probabilité de présence dans le plan du capteur qui est perpendiculaire à la propagation du faisceau laser. C'est ce que représente la figure 3.18 pour un faisceau traversant la cellule pratiquement en son centre, avec un nombre de RAYLEIGH de 2.10^9 . On y constate une dissymétrie dans la direction OZ parallèle au gradient thermique imposé. S'il semble que $\langle \partial_x T \rangle_L$ symétrique soit de valeur moyenne temporelle nulle, on peut s'interroger sur l'effet des événements rares sur la valeur de $\langle \partial_z T \rangle_L$. En effet, si du fait du mélange on s'attend à avoir des températures homogènes au centre, est-ce la valeur la plus probable ou la valeur moyenne qu'il faut prendre à 0? Et la différence entre ces deux valeurs donne-t-elle une information sur le flux thermique? Malheureusement nos mesures, telles qu'elles ont été faites ne permettent pas de répondre à ces questions. Remarquons enfin, qu'une nappe laser pourrait donner accès à $\langle \partial_z T \rangle_S$, i.e. la partie conductive du flux de chaleur.

On retrouve les constats présentés ci-dessus figure 3.19 où les PDF des fluctuations des gradients de température sont décomposés suivant les axes OX et OZ , pour différents nombres de RAYLEIGH. On y remarque de plus, que près du point critique les PDF deviennent symétriques et gaussiennes. Cela ne provient pas forcément du fait que le nombre de RAYLEIGH augmentant, le fluide devient plus homogène. En effet, près du point critique le spot laser devient plus diffus et les raisonnements basés sur l'optique géométrique ne sont plus valables dans un tel milieu où les longueurs de corrélation sont de l'ordre de la longueur d'onde. De plus, le comportement du capteur de position n'est pas clair lorsque la taille du spot devient de l'ordre de son déplacement. Par exemple, il se peut que le capteur effectue un filtrage spatial. C'est là une des limites du dispositif. Pour les cas plus éloignés du point critique on trouve que les PDF des fluctuations des gradients thermiques gardent raisonnablement la même forme. Le TABLEAU V donne l'écart type, les facteurs de dissymétrie et d'aplatissement des fluctuations de $X(t)$ et $Z(t)$ correspondant à ces courbes. On y notera la forte diminution du mouvement du spot laser au voisinage du point critique.

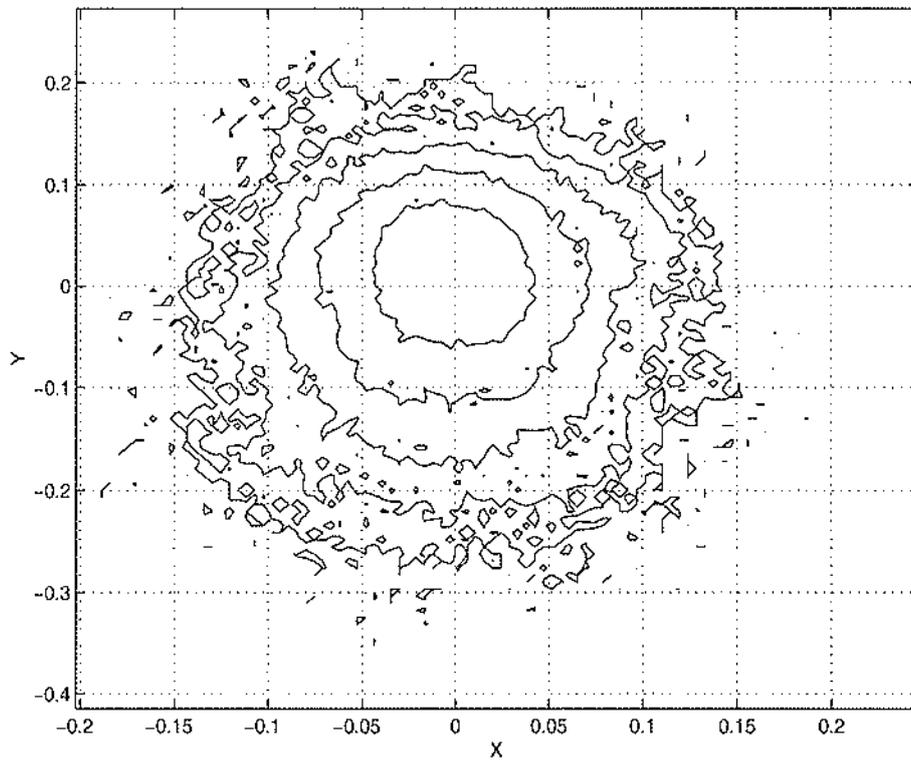


FIG. 3.18 – Contour de la probabilité de présence du spot laser dans le plan du capteur de position perpendiculaire au faisceau. La direction OZ est parallèle au gradient thermique imposé dans la cellule III. $Ra \approx 2.10^9$

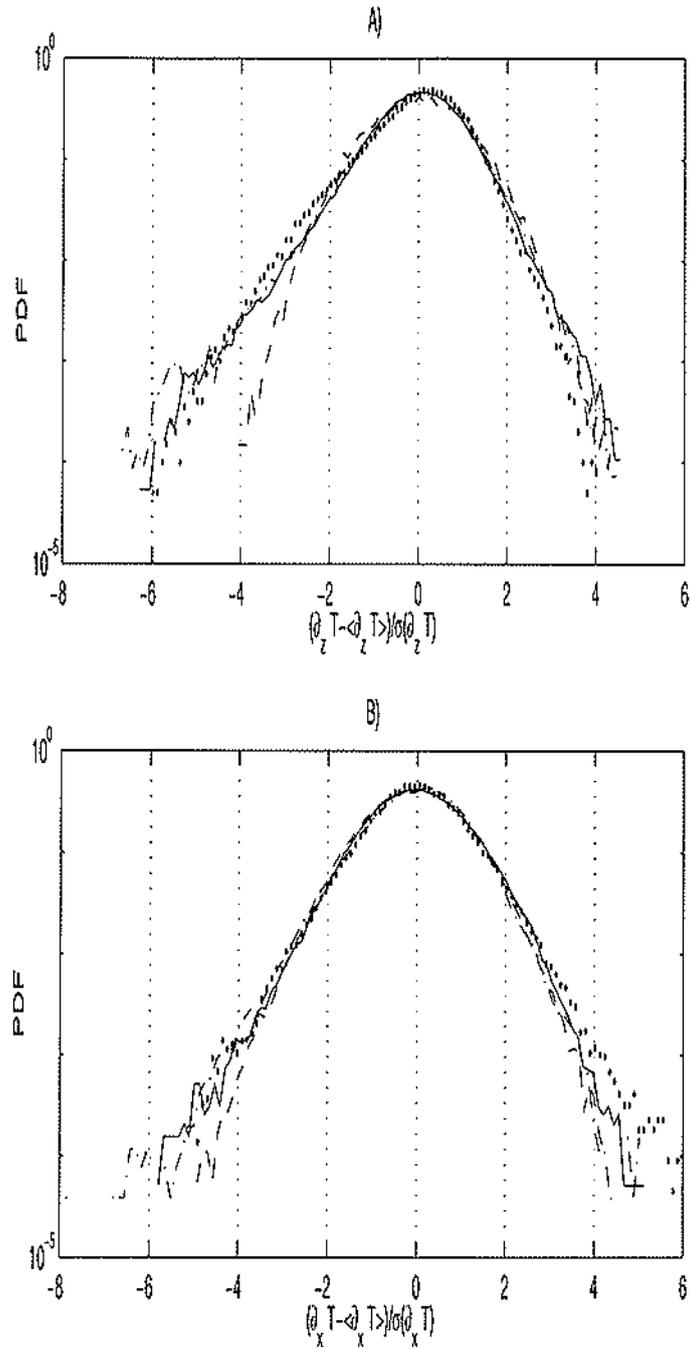


FIG. 3.19 - Superposition des PDF des fluctuations du gradient de température intégré sur une ligne parallèle, figure A), et perpendiculaire, figure B), au gradient imposé aux parois. Avec $Ra = 5.10^{10}$ (---), $Ra = 3.10^9$ (-·-), $Ra = 2.10^9$ (···), et $Ra = 1.10^9$ (—). Nous avons calculé Ra à partir de relations empiriques donnant la valeur des paramètres caractéristiques du CO_2 (λ , C_p , α , ...) près de son point critique, en fonction de $(T - T_c)$. Ces relations nous ont été fournies par Y. Garrabos.

Ra	écart type		dissymétrie		aplatissement	
	Z	X	Z	X	Z	X
1.10^9	0,020	0,016	-0,4	-0,03	4,6	3,6
2.10^9	0,07	0,04	-0,7	0,02	4,3	4,2
3.10^9	0,13	0,2	-0,5	-0,3	4,8	3,9
5.10^{10}	0,01	0,02	0,03	2.10^{-4}	3,23	3,01

TABLEAU V : Ecart type (en unité de longueur du capteur de position) facteurs de dissymétrie et d'aplatissement des déplacements du spot laser au niveau du capteur de position, dans les directions parallèles et perpendiculaires au gradient imposé aux parois.

D'un point de vue temporel, la figure 3.20 donne la densité spectrale de puissance de $\langle \partial_z T \rangle_L$ et $\langle \partial_x T \rangle_L$ pour un nombre de RAYLEIGH de 2.10^9 et un nombre de NUSSELT de 83. La décroissance de ces spectres est en $\nu^{-3,9 \pm 0,1}$. La comparaison de spectre de $\langle T \rangle_L$ et $\langle \partial_r T \rangle_L$ n'est pas facile car il est difficile de justifier ici l'utilisation l'hypothèse de turbulence gelée de TAYLOR invoqué généralement pour les mesures locales. En effet, cette hypothèse implique la présence d'un écoulement moyen grande échelle advectant les fluctuations spatiales des petites échelles. C'est ce qui permet de passer facilement des spectres spatiaux aux spectre temporelles. Avec des mesures globales, ce n'est plus possible, puisqu'on a pas de mouvement moyen du fluide à l'échelle globale du capteur pour un écoulement confiné. Notons cependant que la décroissance observée ici est proche de celle mesurée pour la densité spectrale de $\langle T_h \rangle_L$. Or on retrouvera plus loin d'autres similitudes entre les fluctuation de flux de chaleur et $\langle T_h \rangle_L$. On ne voit ressortir aucune fréquence particulière du module ou de la phase du spectre croisée de $\langle \partial_z T \rangle_L$ et $\langle \partial_x T \rangle_L$. D'ailleurs, le maximum de leur fonction de corrélation croisé est faible, il vaut moins de 8%. On trouve ce maximum après un temps de corrélation de 0,35 s. La température au milieu de la cellule au voisinage du faisceau et $\langle \partial_z T \rangle_L$ sont faiblement anticorrélés (minimum de la fonction de corrélation normalisées est d'environ -3%), sur des temps courts de 35 ms. Les corrélations entre cette même température et $\langle \partial_x T \rangle_L$ sont pratiquement inexistantes. Cependant, la mauvaise isolation de notre montage et l'inhomegénéité du flux thermique ne nous permettent pas dans l'état actuel des choses de tirer des conclusions définitives.

3.3.3 Fluctuations du flux thermique

Les cellules I et II nous ont permis une mesure directe du flux thermique les traversant. Les mesures des trois capteurs insérés dans la plaque du bas de la cellule I ont été faites individuellement d'une manière simultanée. On peut donc considérer les corrélations entre les différents capteurs d'une plaque. On peut également estimer les corrélations entre les mesures de température intégrées sur une ligne et les mesures de flux thermique. Dans la cellule II, on a mesuré le flux avec les capteurs montés en série. On ne peut donc pas avoir les corrélations sur une plaque. Par contre, comme on a placé des capteurs sur les parois supérieures et inférieures de la cellule, on peut connaître les corrélations entre le flux rentrant et sortant de la cellule. On peut aussi étudier sur cette cellule II les corrélations du flux avec celles de la différence de température $\langle \Delta T \rangle_S$ entre le haut et le bas estimée au moyen de nos huit jonctions de thermocouples de type K. Commençons dans un premier temps par l'étude des fluctuations du flux thermique moyenné sur une surface.

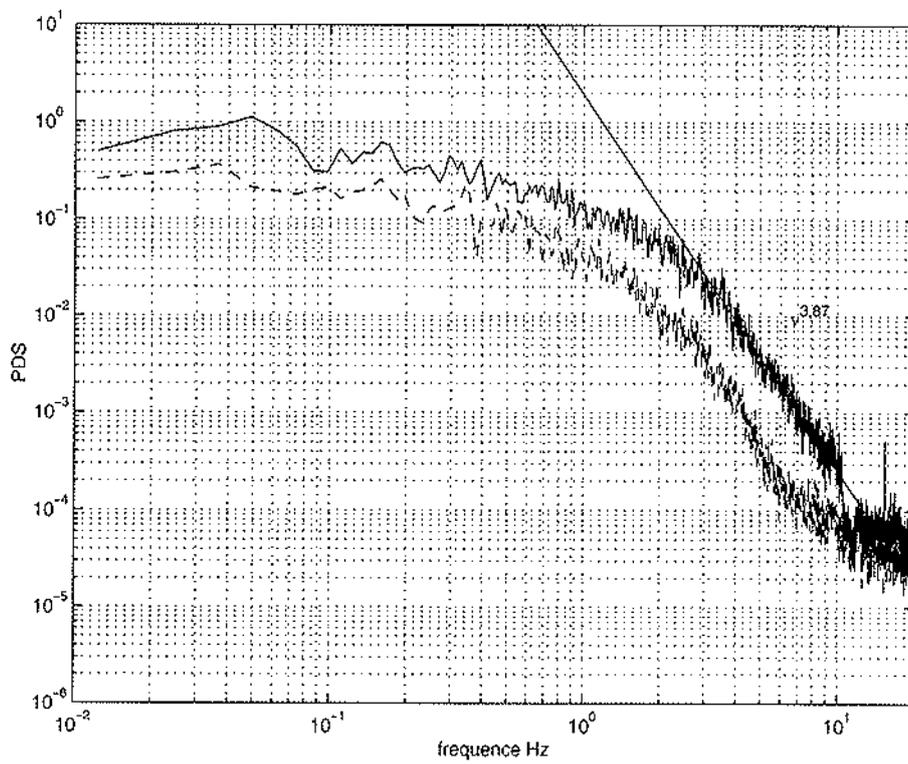


FIG. 3.20 -- Densité spectrale de puissance des fluctuations du gradient de température intergré sur une ligne parallèlement au gradient thermique moyenne imposé (courbe supérieure en ligne continue) et perpendiculairement à celui-ci (pointillés). $Ra = 2.10^9$

Evolution des fluctuations relatives du flux thermique avec le nombre de RAYLEIGH (cellule I et II).

Observons tout d'abord sur la figure 3.21 l'évolution des fluctuations relatives de flux thermique. On constate que celle-ci une décroissance avec un exposant de $-0,3 \pm 0.03$. On a dû tenir compte, sur $\overline{\langle Q_z \rangle_s}$, du facteur multiplicatif 1/2, utilisé dans la figure 3.12, pour obtenir l'alignement de la décroissance des fluctuations relatives dans les deux cellules. Cela revient à dire qu'aucun ajustement n'est nécessaire pour $\sigma(\langle Q_z \rangle_s)$ qui varie continuellement d'une cellule à l'autre. Ici aussi, comme pour les fluctuations relatives de température, on peut invoquer la loi des grands nombres pour essayer de décrire cette loi de puissance. Dans notre expérience, on détermine un flux de chaleur moyenné sur une surface. On s'attend donc à une dépendance linéaire des fluctuations relative de flux thermique avec la longueur de corrélation : $\sigma(\langle Q \rangle_s)/\overline{\langle Q \rangle_s} = 1/\sqrt{N} = l_c/D$, puisque, pour une surface, le nombre de degrés de liberté est en $N \propto (D/l_c)^2$. Le problème revient alors à caractériser la longueur de corrélation du flux thermique dans la cellule de convection. Or, en fonction des hypothèses que l'on fait sur la nature de l'écoulement convectif, qui permettent de trouver tel exposant γ pour la loi de puissance $\overline{Nu} \propto Ra^\gamma$, on obtient des longueurs de corrélation différentes.

Par exemple, comme nous l'avons noté au début de ce chapitre, si on suppose négligeable les effets dissipatifs visqueux et thermiques en régime fortement turbulent, on a alors $\gamma = 1/2$. Dans un tel régime fortement non linéaire, on peut supposer que c'est le mélange par le champ turbulent des vitesses qui fixe la longueur de corrélation. On prendra alors $l_c \approx l_d$ l'échelle dissipative ou $l_c \approx \lambda_T$ l'échelle de TAYLORS. Cela conduit à une décroissance des fluctuations relatives respectivement en $Ra^{-3/8}$ et $Ra^{-1/4}$ qui ne correspond pas à notre mesure expérimentale. Pour expliquer la loi en $\overline{Nu} \propto Ra^{2/7}$ couramment admise, il est proposé d'introduire une longueur caractéristique, $l_m \propto Ra^{-1/7}$, sur laquelle les plumes thermiques issues des couches limites se mélangent au reste du fluide de température homogène [6]. Il semble alors naturelle de prendre l_c proportionnelle à l_m , mais cela devrait conduire à une décroissance des fluctuations relatives du flux de chaleur en $Ra^{-1/7}$.

Nos mesures du nombre de NUSSELT moyen en fonction du nombre de RAYLEIGH conduit à un exposant 1/4. Un tel exposant peut s'expliquer par la présence, à grande échelle, d'un écoulement moyen [16], qui corrèle le fluide sur toute la longueur de la cellule. Donc on ne s'attend pas à avoir une dépendance de l_c avec le nombre de RAYLEIGH contrairement à ce que montre nos mesures de fluctuations de flux. En faite, c'est la loi en $\overline{Nu} \propto Ra^{1/3}$, qui introduit comme seule longueur caractéristique $l_c = e_c = (2Ra_c/Ra)^{1/3}d$, qui conviendrait le mieux à notre mesure expérimentale de la décroissance des fluctuations relatives de flux thermiques. Seulement, accepter une telle épaisseur de couche limite revient à dire que la distance entre les plaques n'est plus une longueur pertinente, ce qui impose par analyse dimensionnelle la loi $\overline{Nu} \propto Ra^{1/3}$ qui n'est pas la valeur que nous obtenons expérimentalement.

Bien que la liste de longueurs présentée ci-dessus ne soit pas exhaustive, on voit qu'avec ce seul raisonnement simpliste, reposant uniquement sur un effet de moyenne spatiale d'éléments décorrélés sur une longueur l_c , il est difficile de justifier de manière satisfaisante les mesures observées. Une première correction peut être apportée si on tient compte d'un filtrage des fluctuations lors de la

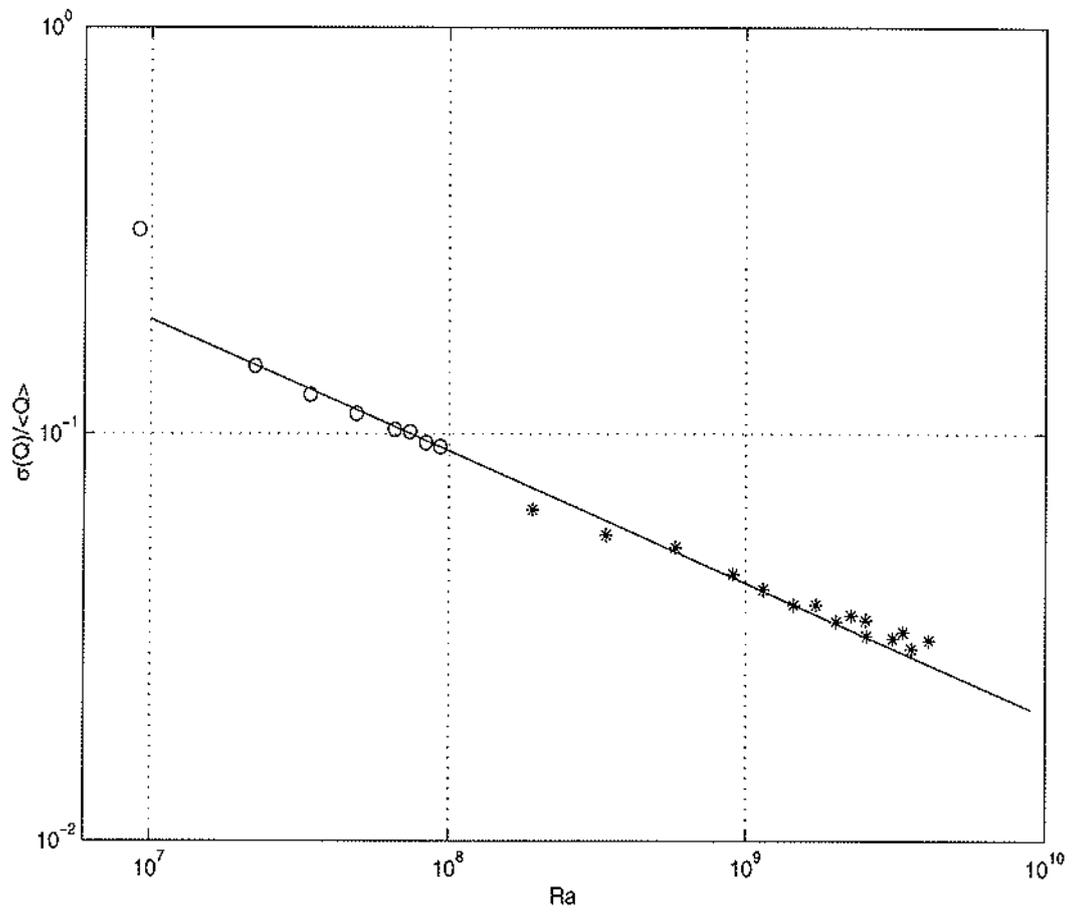


FIG. 3.21 – Evolution des fluctuations relatives de flux thermique dans la cellule I (\circ) et II ($*$). la ligne continue représente une loi en $Nu \propto Ra^{-0,3 \pm 0,03}$

mesure. En effet, si la couche de *Stycast* et le capteur, à cause de leur inertie thermique, filtrent les fluctuations à une fréquence ν_m , petite devant la fréquence ν_o , caractéristique de la coupure naturelle du flux de chaleur en convection, alors les fluctuations mesurées sont plus faibles que celles qui existent dans le fluide. On a (cf 1.1.2 *Application du TCL à la trace temporelle d'un signal*):

$$\frac{\sigma(\langle Q \rangle_s)}{\langle Q \rangle_s} = \frac{l_c}{D} \sqrt{\frac{\nu_m}{\nu_o}}$$

De plus, il est possible que cela modifie la loi de puissance mesurée, car $\sqrt{\nu_m/\nu_o}$ peut être une fonction du nombre de RAYLEIGH. Il apparaît donc important de bien déterminer les temps caractéristiques et les fréquences de coupure de notre dispositif de mesure du flux de chaleur.

Or, si un saut brusque du flux de chaleur (i.e. de la dérivée de la température) se produit en un point à la surface d'un matériaux, il ne sera mesuré en un autre point, à une distance e_s de la surface à l'intérieur de ce matériaux, qu'après stabilisation des gradients de température sur cette épaisseur. Le temps caractéristique de réponse de l'ensemble, couche de résine époxy (*Stycast*) + capteur, est donc le temps de diffusion de la température à travers ces matériaux. D'où l'on déduit la fréquence de coupure du dispositif de mesure: $\nu_m = 1/(e_s^2/\kappa_s + e_K^2/\kappa_K)$ avec $e_s \approx 10^{-3} \text{ m}$ et $\kappa_s = 6.10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ respectivement l'épaisseur et la diffusivité thermique de la couche de résine et $e_K = 2,3.10^{-4}$ et $\kappa_K = 8,8.10^{-8}$ les mêmes quantités pour le capteur de flux thermique. La fréquence $\nu_m \approx 0,5 \text{ Hz}$ est donc relativement faible, mais la fréquence propre du flux thermique dans le fluide en convection, ν_o , que l'on peut de même supposer égale à κ_{eau}/e_c^2 , est en générale plus grande. L'analyse des densités spectrales de puissance que nous exposons par la suite, nous incite également à penser que les fluctuations d'une grandeur globale, comme le flux de chaleur, ne sont sensibles qu'aux modifications de l'écoulement sur de grandes échelles, ces variations temporelles grandes échelles ne se développant qu'à basses fréquences. Rappelons toutefois que l'épaisseur de la couche limite est en $e_c \approx d/Nu$. Donc il est possible qu'on atteigne la limite de résolution temporelle, dans la petite cellule à grand nombre de NUSSELT. Si le filtrage joue un rôle, ce sera sur quelques points de la figure 3.21 dans la petite cellule à haut nombre de RAYLEIGH⁷, qui tendent à augmenter la décroissance des fluctuations relatives (i.e. notre exposant 0,3 est donc plutôt surestimé). Notons enfin qu'il est possible de filtrer les signaux issus de la cellule II jusqu'à 0,1 Hz sans modifier de plus de 2 % l'écart type du flux de chaleur.

Par ailleurs, un raisonnement ne prenant en compte que la loi des grandes nombres, néglige la possible dépendance des fluctuations du flux de chaleur en un point, $\sigma(Q_z(r, t))$, avec le paramètre de contrôle, i.e. avec le ΔT . Or, comme on l'a vu pour la température intégrée sur une ligne, cela peut modifier d'une façon significative la décroissance des fluctuations relatives de la grandeur globale considérée. En fait, $\sigma(Q_z(r, t))$ va mesurer localement les fluctuations du gradient de température à travers la paroi. Ces fluctuations seront d'autant plus grandes que les plumes ou les gouttes arrachées de la paroi opposée sont à une température différente. On peut supposer que $\sigma(Q_z(r, t))$ est proportionnel au ΔT entre les plaques, comme pour la température intégrée sur une ligne près de la couche limite supérieure. On constate alors qu'il y a très peu d'effet dû à la moyenne puisque, comme le montre un calcul simple et la figure 3.22, on a, après une moyenne sur

7. C'est d'ailleurs une des raisons qui nous a amenés à construire une cellule plus grande.

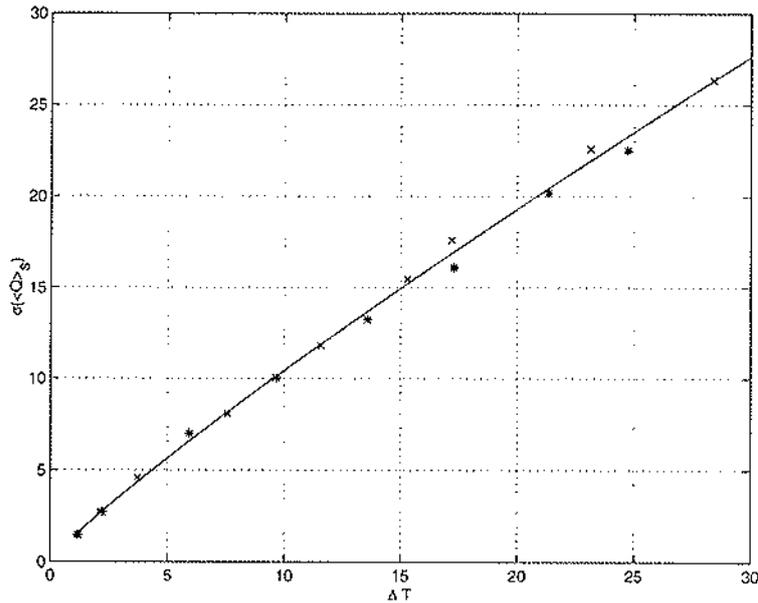


FIG. 3.22 – Représentation linéaire de l'écart type des fluctuations du flux de chaleur moyenné sur la plaque inférieure en fonction de la différence de température entre la plaque dans la cellule I (***) et dans la cellule II (x x x). La ligne continue représente le meilleur ajustement par une loi de puissance en $\sigma(\langle Q_z \rangle_s) \propto \Delta T^{0.9}$.

toute la surface :

$$\begin{aligned} \sigma(\langle Q_z \rangle_s) &\propto \Delta T^{-0.3} \overline{\langle Q_z \rangle_s} \\ &\propto \Delta T^{0.95} \end{aligned}$$

Les fluctuations de flux thermique, dues à l'arrivée de plumes provenant de la plaque opposée, seraient donc corrélées sur de grandes distances (de l'ordre du diamètre de la cellule). Cette image permet aussi d'expliquer la forme des PDF des fluctuations comme nous allons le voir au paragraphe suivant.

Formes des fonctions de densité de probabilité (cellule I et II)

La forme des PDF des fluctuations de flux thermique à travers la plaque inférieure centrées et normalisées par leur écart type, est présenté figure 3.23. De manière générique, on y constate une dissymétrie vers les événements positifs. Rappelons que pour la trainée sur une pale la dissymétrie était dans l'autre sens. Cette dissymétrie peut s'expliquer de la façon suivante: les événements rares pour le flux de chaleur mesuré au niveau de la plaque supérieure résultent de plumes chaudes provenant de la plaque inférieure. Celles-ci engendrent une augmentation du flux de chaleur puisqu'elles augmentent la température moyenne du fluide au voisinage de la plaque supérieure et donc le gradient de température à travers celle-ci. Il n'est donc pas surprenant que le fil de platine placé au voisinage de la paroi supérieure présente une dissymétrie vers les grandes valeurs de résistance

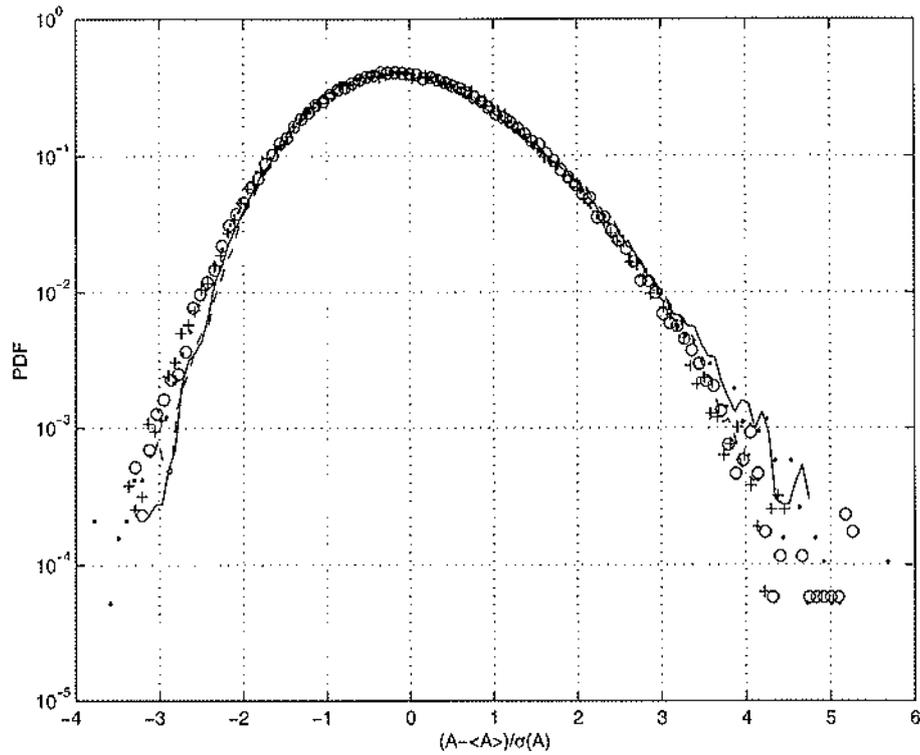


FIG. 3.23 – Superposition des PDF des fluctuations centrées et normées par l'écart type du flux dans la cellule I (o), (+), et II (—), et (---) et de la température près de la couche limite thermique supérieure dans la cellule I (···). Les nombres de RAYLEIGH pour lesquels ont été établies ces courbes, sont : $Ra = 2,2 \cdot 10^7$ (+), $Ra = 5,7 \cdot 10^7$ (o), $Ra = 8,3 \cdot 10^7$ (···), $Ra = 1,7 \cdot 10^9$ (—) et $Ra = 5,7 \cdot 10^9$ (---).

donc de température (cf figure 3.14). Il est tout de même remarquable de constater que la PDF de la température intégrée sur le fil se superpose exactement à celle des fluctuations de flux de chaleur (cf figure 3.23). Au voisinage de la plaque inférieure, les événements rares sont les gouttes froides en provenance de la plaque supérieure. Ils conduisent à une diminution de la température du fluide au voisinage de la plaques inférieure et donc également à une augmentation du gradient de température et donc du flux thermique entrant.

Par une étude plus attentive, on constate le caractère légèrement plus symétrique des fluctuations de flux dans la cellule I, pour lesquels il y a plus d'événements négatifs. On peut expliquer ce fait par la différence de chauffage entre les deux cellules. Dans la cellule I, la chaleur est fournie par une résistance qui ne fixe pas directement la température de la plaque comme le fait le bain thermique dans le cas de la cellule II. On est plus près d'une convection à flux constant. Cependant l'évolution du facteur de dissymétrie représenté figure 3.24 semble se faire continuellement entre les deux cellules lorsqu'on augmente le nombre de RAYLEIGH indépendamment du chauffage et du rapport d'aspect. Cette dissymétrie augmente avec le nombre de RAYLEIGH. On est donc loin de tendre vers une gaussienne. Seule une saturation semble apparaître sur les derniers qui s'écartent

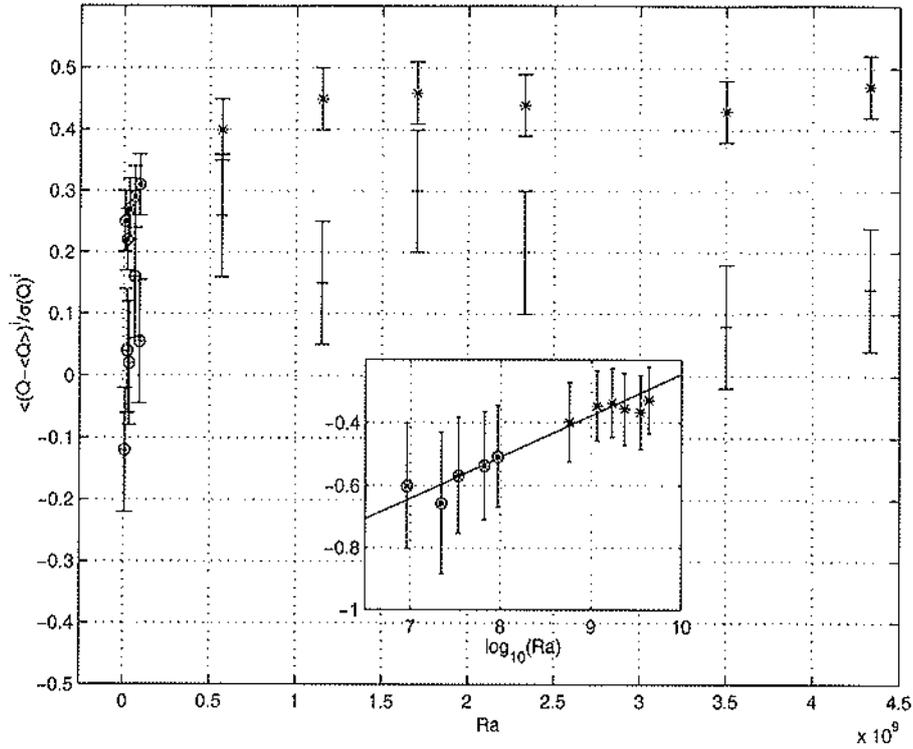


FIG. 3.2A – Evolution de l'écart à la gaussienne des facteurs de dissymétrie (*) et d'applatissage (+) des fluctuations du flux thermique sur la plaque inférieure, en fonction du nombre de RAYLEIGH. Les points cerclés correspondent à la cellule I. En médaillon on a représenté le logarithme du facteur de dissymétrie en fonction de $\log_{10}(Ra)$. La droite représente une loi en puissance 0,13, les deux derniers points étant exclus de la détermination de cette loi.

d'une loi en $Ra^{0,13}$ valable à plus faible nombre de RAYLEIGH pour la dissymétrie.

Par ailleurs, on sait que si $X(t)$ obéit à une équation différentielle du premier ordre avec un bruit multiplicatif gaussien, on peut avoir pour sa loi de probabilité :

$$\rho(X) \propto X^a \exp(-bX) \quad (3.14)$$

avec $\langle X \rangle = \frac{a+1}{b}$ et $\sigma(X)^2 = \frac{a+1}{b^2}$ [17]. Or, on s'aperçoit, figure 3.25, qu'une telle loi coïncide très bien avec nos distributions de fluctuations mesurées expérimentalement dans la cellule I. De ce point de vue, le bruit multiplicatif gaussien peut s'interpréter comme des fluctuations gaussiennes du nombre de RAYLEIGH, paramètre de contrôle des équations de BOUSSINESQ sans dimension. En effet, le nombre de RAYLEIGH fluctue puisque les températures moyennes à l'interface paroi-fluide en haut et en bas fluctuent. Si ces fluctuations sont décorréées, on peut supposer que les fluctuations de leur différence soient relativement gaussiennes⁸. Ramener les équations de BOUSSINESQ, avec des conditions aux limites fluctuantes pour la température, à une équations stochastique pour le

8. Pour les fluctuations de la température moyenne à l'interface, on s'attend à observer de fluctuations semblables à celles du flux, comme le montre nos mesures intégrées sur une ligne près de la couche limite thermique.

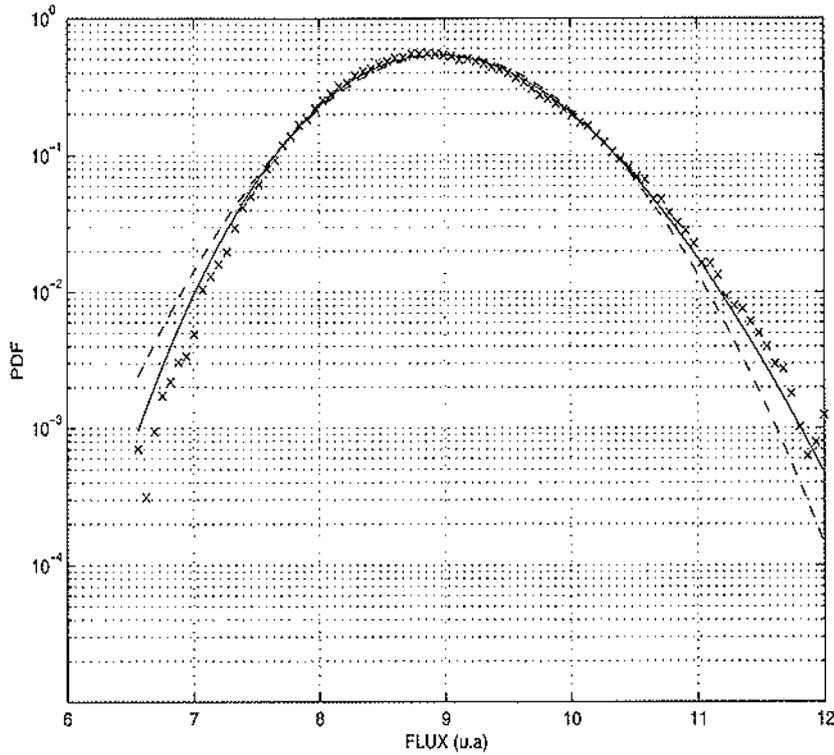


FIG. 3.25 - Loi de la distribution de probabilité des fluctuations du flux de chaleur dans la cellule I. Les croix (x x x) représentent la distribution des fluctuations de flux de chaleur mesurées dans la cellule I. Les tirets (---) donnent la gaussienne de même moyenne et écart type. Le trait plein (—) correspond à la loi de probabilité (3.14): $\rho(Q) \propto Q^{<Q>^2/\sigma(Q)^2-1} \exp(-<Q>Q/\sigma(Q)^2)$. $Ra = 8,3.10^7$

flux de chaleur avec un bruit multiplicatif, reste cependant un travail à faire. Dans la cellule II l'accord avec la loi (3.14) est moins bon car la dissymétrie est plus grande. Cela tient peut-être au fait que les fluctuations du nombre de RAYLEIGH y sont moins gaussiennes.

Spectre et corrélations des fluctuations de flux thermique.

Densité spectrale de puissance des fluctuations de flux thermique.

Rappelons que la mesure de la décroissance des fluctuations du flux de chaleur n'est représentative d'un phénomène propre à la convection du fluide, que si la fréquence naturelle de coupure du flux de chaleur, ν_o , est plus basse que la fréquence coupure, ν_n , du filtre thermique que constituent le capteur et la couche de résine époxy. Une étude directe de la densité spectrale de puissance (PDS) des fluctuations de flux thermique dans les cellules I et II va nous permettre de vérifier les hypothèses que nous avons faites sur la fréquence de coupure intrinsèque ν_o que nous avons

précédemment supposé égale à κ_{eau}/e_c^2 .

La figure 3.26 représente ces PDS pour deux nombres de RAYLEIGH caractéristiques des cellules I et II. On y remarque tout d'abord une coupure d'ordre élevé puisque la décroissance des densités spectrales de puissance, en $\nu^{-7,5 \pm 0,5}$, est rapide, et est à peu près la même quelque soit le nombre de RAYLEIGH. Une si grande puissance pour la décroissance du spectre nous a incités à décrire cette coupure par une exponentielle : $\exp(-\nu/\nu_o^{exp})$. Cette loi est testée sur le médaillon de la figure 3.26 pour la cellule I avec la fréquence propre $\nu_o^{exp} \approx 80\text{mHz}$ sur cette figure. Comme ce constat reste vrai aux autres nombres de RAYLEIGH on peut faire une étude systématique de ν_o^{exp} en fonction du nombre de NUSSELT, afin de comparer la valeur ν_o^{exp} , tirée de nos spectres expérimentaux, et la valeur espérée $\nu_o^{th} = \kappa_{eau}/e_c^2$, avec $e_c \approx d/\overline{Nu}$. Ces deux valeurs sont reportées dans le TABLEAU VI. On y voit que notre hypothèse est raisonnable, puisque leur rapport est proche de un et que, pour une cellule donnée, ce rapport reste à peu près constant. La différence entre les deux cellules est sans doute due aux problèmes déjà évoqués lors de l'étude de la loi $\overline{Nu} = Ra^\gamma$ (figure 3.12). Enfin, notons que ν_o^{exp} est toujours au moins 5 fois plus faible que ν_m , la coupure du dispositif mesure. Cependant la fréquence caractéristique ν_o^{exp} , calculée à partir de la décroissance exponentielle $\exp(-\nu/\nu_o^{exp})$, n'est pas toute à fait la fréquence de coupure des spectres, mais cette dernière n'est pas clairement définie pour ce type de spectres exponentiels.

	Cellule I					Cellule II				
\overline{Nu}	16,6	17,3	18,1	18,8	19,1	58,9	61,4	65,5	68,7	70,0
$e_c \approx d/\overline{Nu}$ (mm)	1,80	1,72	1,65	1,60	1,57	3,40	3,26	3,05	2,91	2,81
ν_o^{th} (mHz)	45	49	54	57	59	13	14	16	17	18
ν_o^{exp} (mHz)	43	64	65	75	81	9	11	12	13	13,5
ν_o^{th}/ν_o^{exp}	1,05	0,76	0,83	0,75	0,73	1,46	1,25	1,34	1,35	1,36

TABLEAU VI: Comparaison des fréquences caractéristiques des fluctuations du flux thermique obtenues : à partir des spectres expérimentaux, ν_o^{exp} , ou à partir de la diffusion de la chaleur au travers de la couche limite thermique, $\nu_o^{th} \approx \kappa_{eau}\overline{Nu}^2/d^2$.

Rappelons, pour en conclure avec l'étude des densités spectrales de puissance, qu'une variable dont le spectre décroît en ν^{-2} , comme le fait pratiquement $\langle T_m \rangle_L$, peut aléatoirement présenter des discontinuités dans la gamme de fréquence considéré alors que lorsque la décroissance est en ν^{-4} , comme $\langle T_h \rangle_L$ et $\langle \partial_r T \rangle_L$, c'est seulement la dérivée temporelle de la variable qui est susceptible de présenter de telles discontinuités. Enfin pour une décroissance exponentielle, comme pour $\langle Q_z \rangle_S$, on s'attend à ce que ni la variable ni ces dérivées n'aient ce type de discontinuité. Ce constat peut paraître curieux puisque localement on a : $\rho C_p \partial_t T = -\nabla Q$. Notons cependant que les variables globales considérées ici, ne sont pas moyennées spatialement sur une dimension équivalente. Le flux de chaleur, intégré sur une surface, peut avoir des variations temporelles plus "douces" que la température intégrée sur une ligne.

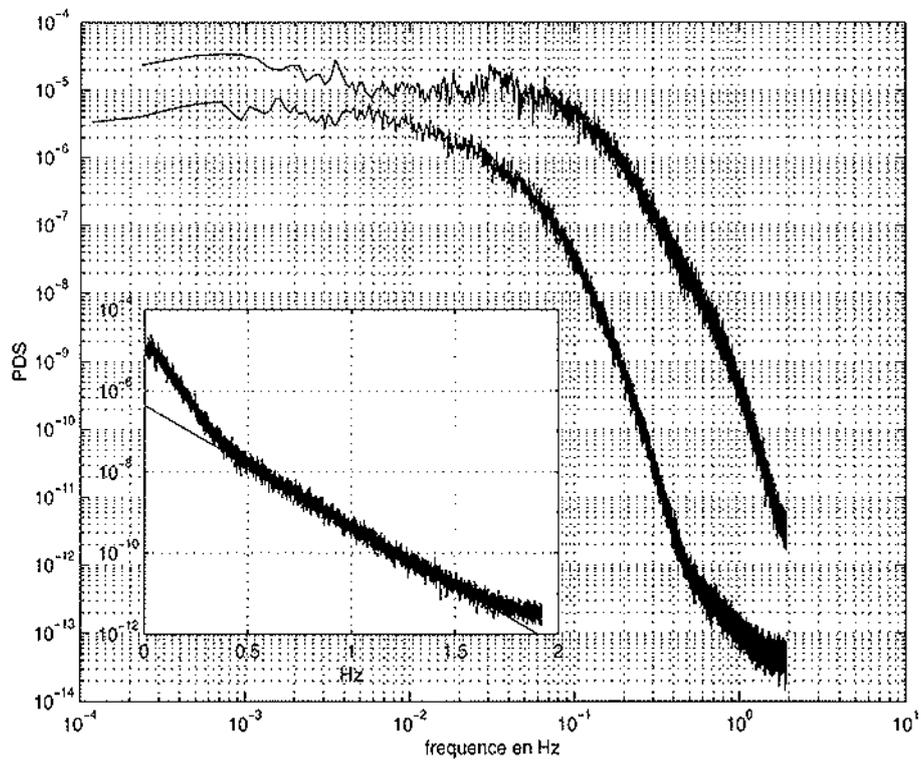


FIG. 3.26 - Densité spectrale de puissance des fluctuations de flux thermique dans la cellule I (courbe supérieure) pour $Ra = 8,3.10^7$, et dans la cellule II (courbe inférieure) où $Ra = 3,3.10^9$. Le médaillon correspond à la représentation semilogarithmique de la densité spectrale du flux de chaleur dans la cellule I et de la loi de décroissance exponentielle correspondante

Corrélations entre capteurs de flux thermique d'une même plaque (cellule I) et entre capteurs de flux des plaques supérieure et inférieure (cellule II).

Pour commencer, il est particulièrement instructif de regarder individuellement les PDF des fluctuations de flux mesurées par chaque capteur d'une même plaque, car elles sont très différentes et même pour deux d'entre elles, notés F11 et F12, leur forme évolue avec le nombre de RAYLEIGH alors que leur somme garde la même forme. Cela se comprend mieux si on regarde l'évolution temporelle basse fréquence de signaux issus de deux capteurs. On voit figure 3.28 que les traces temporelles des capteurs F11 et F12 à $Ra = 3,4.10^7$ lissé sur 3/4 d'heure oscillent entre deux valeurs de façon tout à fait antisymétrique, de sorte que leur moyenne reste pratiquement constante. A $Ra = 9.1.10^6$, ce phénomène s'observe aussi entre les capteurs F11 et F13. Il est beaucoup moins important à $Ra = 8,3.10^7$. Comme le montre la figure 3.29, la présence d'un écoulement moyen avec des courants ascendants chauds et descendants froids qui puissent s'inverser sur de grandes échelles de temps, peut expliquer ces oscillations locales du flux thermique [18]. Celles-ci influencent beaucoup la forme des histogrammes du flux thermiques localement, mais se compensent en moyenne sur la plaque. Cela se retrouve sur les fonctions des corrélations croisées entre les capteurs concernés par ce phénomène. En effet, après une décroissance rapide aux temps courts, ces fonctions tendent vers zéro très lentement⁹. Cela se constate également sur la probabilité d'observation d'un événement supérieure à deux fois l'écart type qui chute énormément quand on conditionne cette observation à la présence d'un événement rare sur un autre capteur de la plaque. Ces résultats sont regroupés dans le TABLEAU VII. Ils confirment la forte anticorrélation entre les capteurs.

Ra	$9,1.10^6$	$3,4.10^7$	$8,3.10^7$
$P(2 1)/P(2)$	0,07	0,08	0,54
$P(3 1)/P(3)$	0,15	0,92	0,886
$P(3 2)/P(3)$	0,32	0,73	0,78

TABLEAU VII: Rapport entre la probabilité conditionnée d'avoir un événement supérieur à deux fois l'écart type sur le capteur i sachant qu'on en a eu un au même instant sur le capteur j $P(i|j)$, et la même probabilité non conditionnée $P(i)$ pour trois nombres de RAYLEIGH dans la cellule I.

Si on cherche les corrélations entre les plaques à partir de la fonction des corrélations croisées entre les mesure de flux en haut et et en bas dans la cellule II, on ne peut mettre en évidence aucune corrélation entre le haut et le bas de la cellule. De même on ne peut sortir aucune information sur ces corrélations à partir du spectre croisé entre les signaux de flux issus des deux plaques. Les PDF des fluctuations sur une plaque ne sont pratiquement pas modifiées lorsqu'on les conditionne à la présence d'événements rares sur l'autre plaque. Cette décorrélation est peut-être due aux conditions expérimentales car pour cette cellule II, on s'est contenté de compenser les gains et les pertes latérales de flux thermique ce qui peut entraîner une décorrélation qui n'a peut être pas lieu quand on interdit tout échange avec l'extérieur comme dans la cellule I. Il sera donc intéressant de regarder dans la cellule I, la corrélation entre le flux en bas et les fluctuations de la température près de la couche limite froide (elle-même sans doute très liée aux fluctuations de flux thermique sur la plaque du haut.). Mais avant, considérons l'évolution avec le nombre de

⁹. Notons par contre que les extréma (ce sont des minima) des fonctions de corrélations croisées se situent à des temps courts entre 0 et 1s

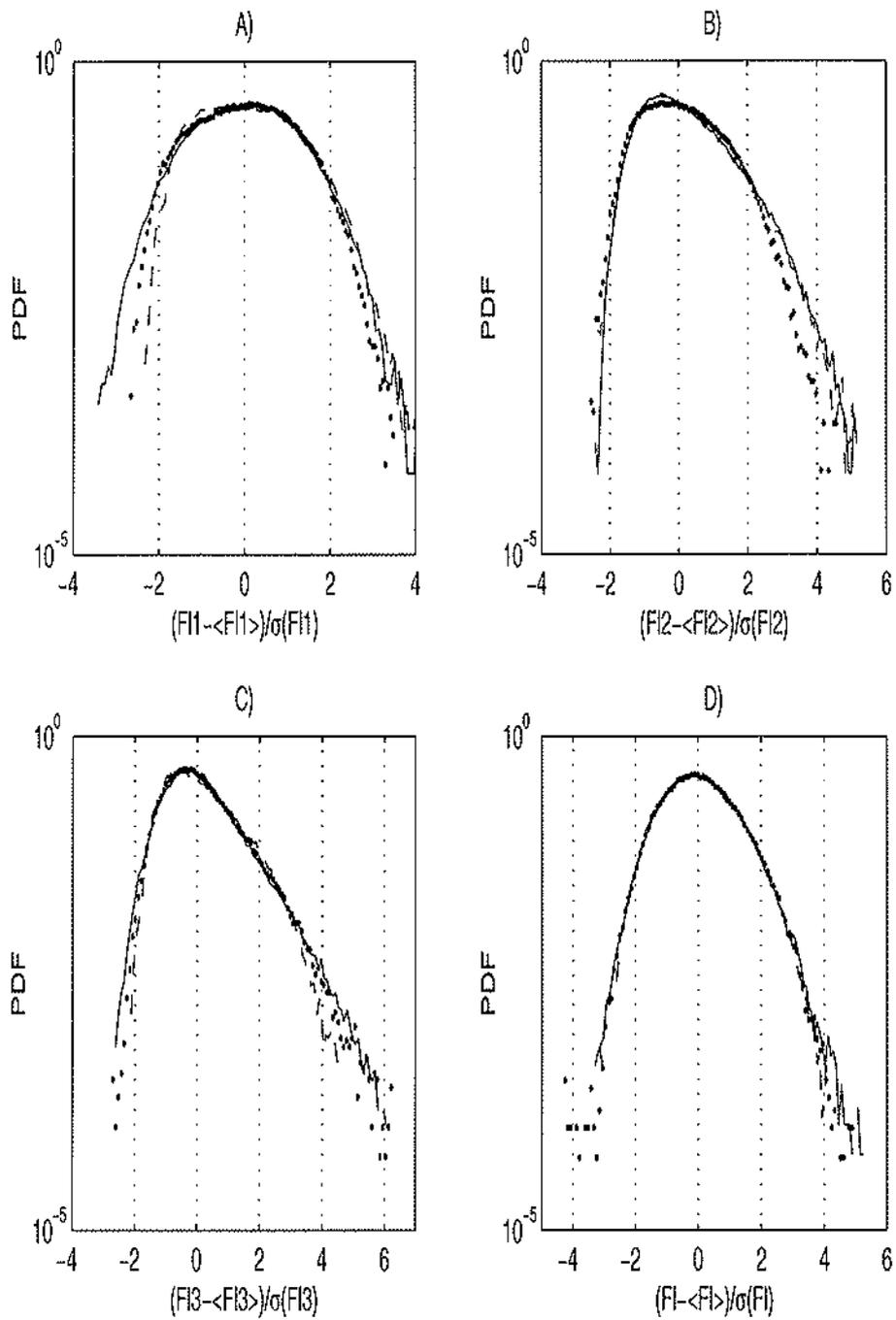


FIG. 3.27 - PDF des fluctuations de flux thermique centrées et normées par l'écart type mesuré avec nos trois capteur de flux $F11$, $F12$ et $F13$ courbe A), B), et C) et de leur moyenne courbe D) pour $Ra = 9,2 \cdot 10^6$ (---), $Ra = 3,4 \cdot 10^7$ (···), et $Ra = 8,3 \cdot 10^7$ (—).

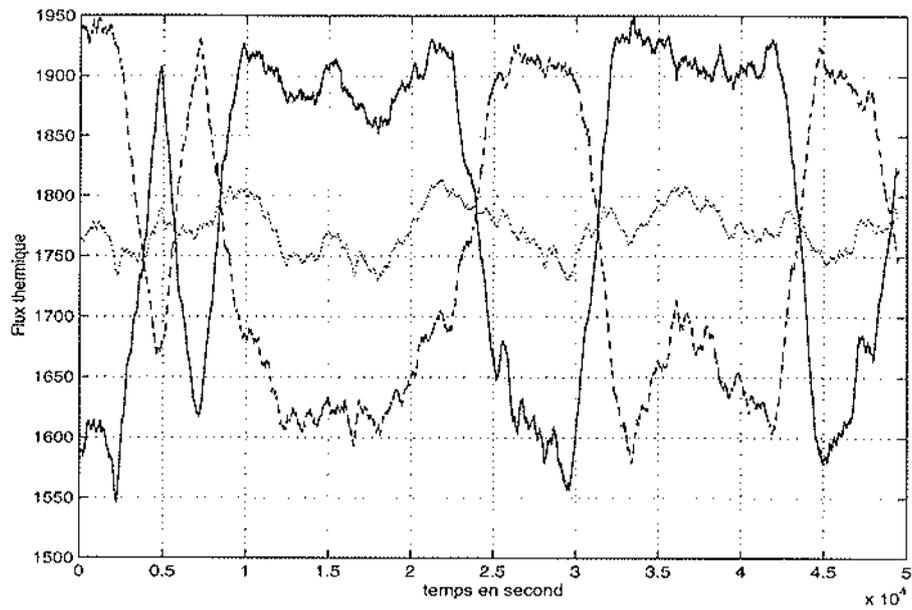


FIG. 3.28 - Traces temporelles des fluctuations de flux thermique enregistrées par les capteurs FI1 (—) et FI2 (---), et leur moyenne (...).

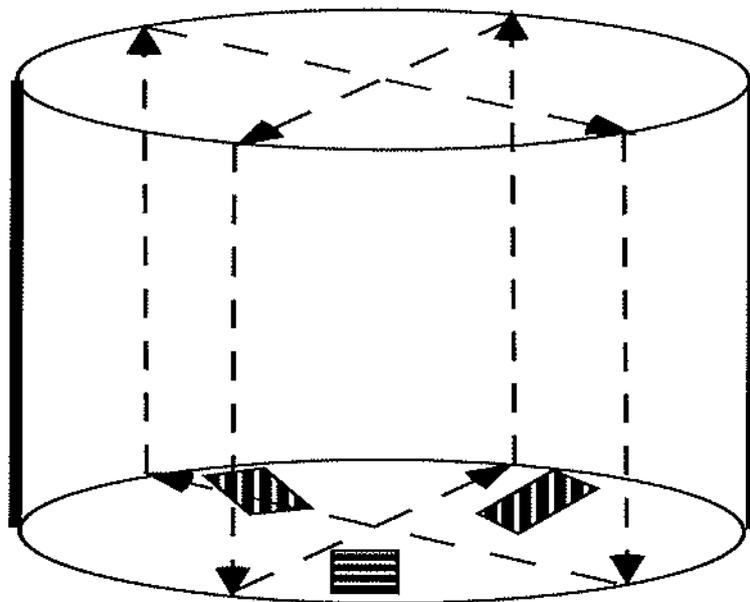


FIG. 3.29 - Représentation schématique deux positions possibles d'un l'écoulement moyenne dans la cellule I par rapport aux capteurs de flux FI1 et FI2.

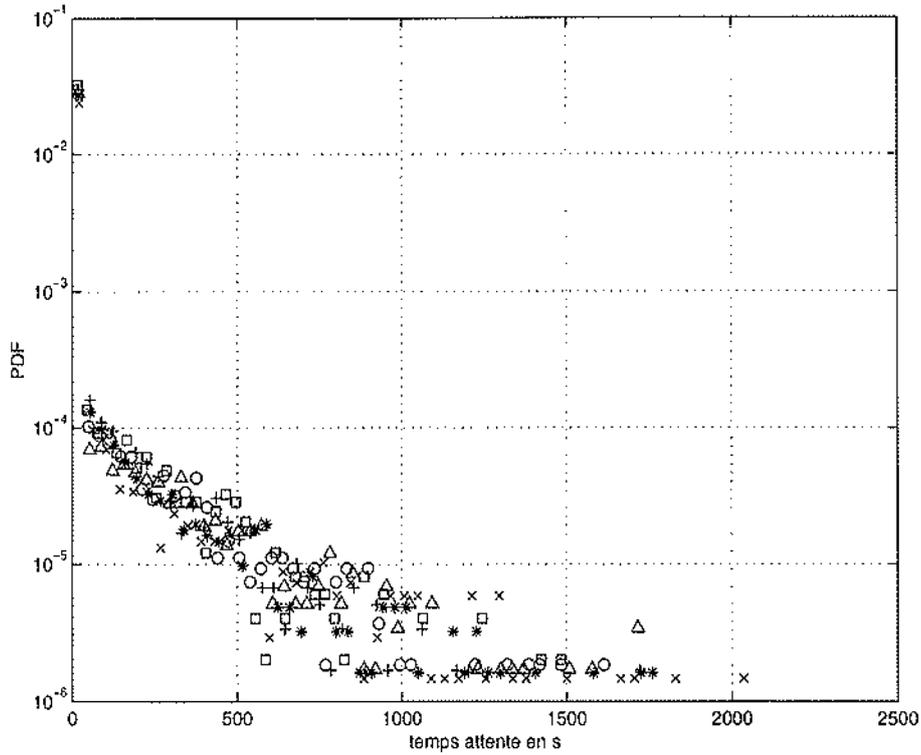


FIG. 3.30 – Distribution des temps d'attente entre deux mesures de fluctuations du flux thermique supérieures à deux fois l'écart type. Ces distributions sur la plaque supérieure sont représentées par (Δ) pour $Ra = 1, 1.10^9$, (\circ) pour $Ra = 2, 3.10^9$, et (\square) pour $Ra = 3, 5.10^9$. Sur la plaque inférieure pour les mêmes valeurs du nombre de RAYLEIGH on a utilisé respectivement les symboles : (\times), ($*$), et ($+$).

RAYLEIGH, des distributions des temps d'attente entre événements rares sur les plaques du haut et du bas, représentées sur figure 3.30. A l'exception du premier point, ces distributions paraissent exponentielles. Ce sont à peu près les mêmes en haut et en bas, et elles semblent peu dépendre du nombre de RAYLEIGH.

Corrélations entre capteurs de flux de la plaque du bas et fluctuations de la température intégrée sur une ligne (cellule I) et entre capteurs de flux et fluctuations de la différence de température entre les plaques (cellule II).

Comme le montre la figure 3.31, la fonction des corrélations croisées entre les fluctuations de flux thermique et celles de la température intégrée sur trois lignes parallèles, présente un maximum bien défini autour de 10%. Cela permet de définir un temps de corrélation précis entre flux thermique en bas et fluctuations de température près de la couche limite thermique supérieure. Ce temps vaut $t_c = -13s$ pour la cas de la figure 3.31 (où $Ra = 8, 3.10^7$). Notons que le second maximum arrive à un temps de 13 s symétrique par rapport à 0. Ce temps de corrélation est du

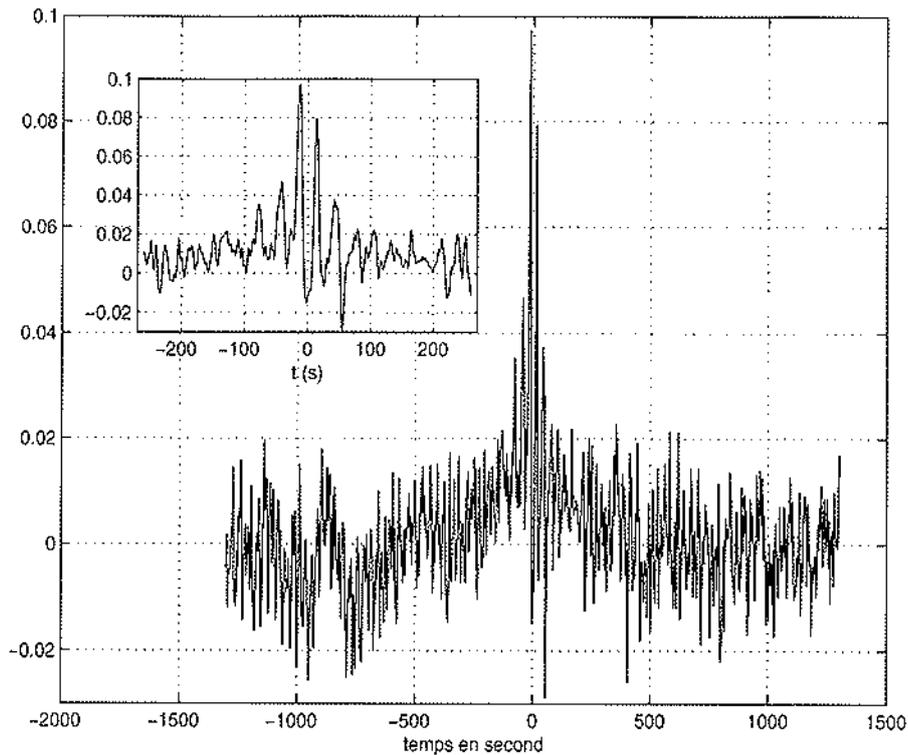


FIG. 3.31 – Fonction des corrélations croisées entre les fluctuations de flux moyen traversant la plaque du bas et les fluctuations de la température intégrée sur trois fils parallèles au voisinage de la couche limite supérieure pour un nombre de RAYLEIGH de $8,3 \cdot 10^7$. En médaillon on représente cette même fonction 5 fois plus moyennée.

même ordre que celui mis en évidence lors de l'étude précédente des corrélations entre mesures globales de température dans cette cellule I. On peut donc se poser la même question qu'alors sur l'origine de ce temps caractéristique. Pour ce faire, on a tracé figure 3.32 le logarithme de ce temps de corrélation $|t_c|$ en fonction de celui du nombre de RAYLEIGH. On constate un bon accord avec la loi en $Ra^{-1/2}$ qui tendrait à lier ce temps de corrélation à une vitesse d'écoulement moyen. On reporte également à titre de comparaison figure 3.32 le temps caractéristique de la plaque de cuivre t_{Cu} .

Les fonctions des corrélations croisées entre le flux thermique à travers la plaque du bas et la température intégrée sur une ligne au milieu de la cellule donnent des résultats similaires avec un temps de corrélation plus petit d'un tiers environ. Le module des spectres croisés entre flux et température laisse apparaître une fréquence caractéristique dont l'inverse se comporte comme t_c quand le nombre de RAYLEIGH croît. De plus la probabilité d'observer des événements rares (supérieurs à deux fois l'écart type) est légèrement augmentée, i.e. multipliée par $1.5 \pm 0,2$ quand on conditionne cette probabilité à la présence de ce type d'événements rares pour le flux thermique à un instant t_c antérieur.

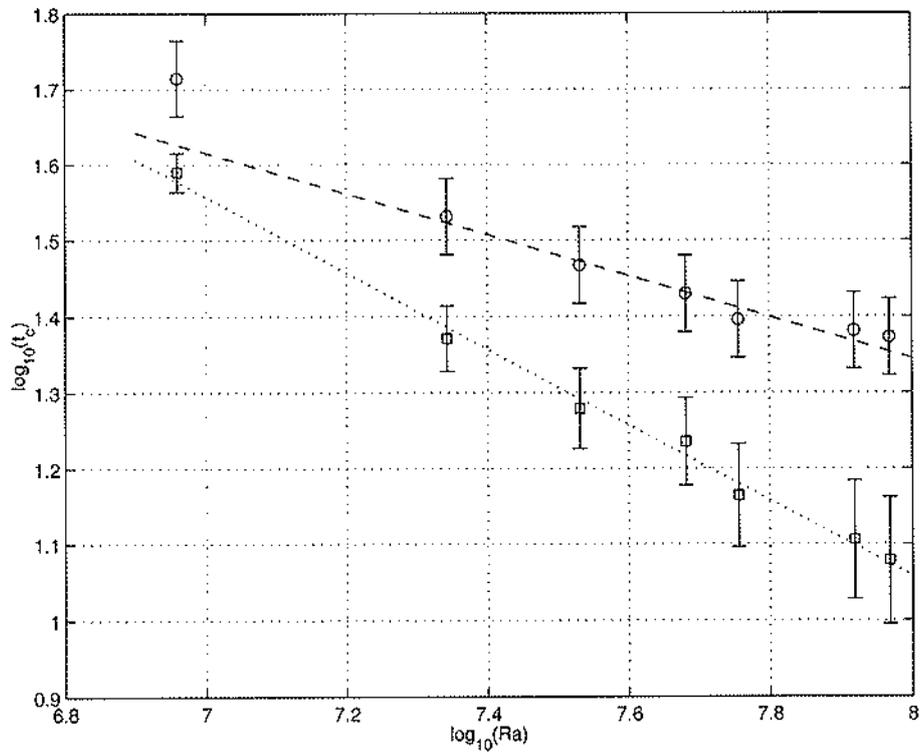


FIG. 3.32 – Représentation logarithmique en fonction du nombre de RAYLEIGH du temps de corrélation entre flux thermique en bas et température moyennée près de la plaque supérieure (□) et du temps caractéristique de la plaque de cuivre t_{Cu} , (o). Les tirets qui représentent la meilleure interpolation linéaire de cette dernière (le premier point étant exclu) donne une loi de puissance en $Ra^{-0,27}$ proche de $Ra^{-2/7}$. Les pointillés approximent une loi en $Ra^{-1/2}$ pour t_c .

Pour finir, étudions le lien entre fluctuations de flux thermique et fluctuations de la différence de température ΔT_{tc} entre les plaques mesurées par nos huit thermocouples. Pour la plaque du bas, nous avons utilisé, pour trois d'entre eux, les thermocouples associés au capteur de flux. Ces trois thermocouples mesurant une référence chaude au voisinage des capteurs, on trouve que le ΔT_{tc} mesuré est très corrélé au flux thermique en bas (le maximum de la fonction des corrélations croisées vaut presque 40%) sur des temps courts (de quelques secondes). Par contre, sur la plaque du haut, où on a pris soins de placer les thermocouples loins des capteurs de flux, il ne semble y avoir aucune corrélation entre le ΔT_{tc} et le flux traversant cette plaque. En fait il apparaît que nos huit thermocouples ne suffisent pas pour donner une estimation des fluctuations globales de $\langle \Delta T \rangle_s$.

3.4 conclusions

De nombreux indices, fluctuations sur de grandes échelles de temps des capteurs de flux individuels, corrélations flux-température, s'accordent avec la présence d'un écoulement moyen dans la cellule I. Ces indices n'apparaissent plus dans la cellule II. De plus, les mesures de la rétrodiffusion d'ondes ultra-sonores par les inhomogénéités de température, n'y ont pas fait apparaître de décalage DOPPLER dû à la présence d'un écoulement moyen. Cependant, cela ne permet pas d'affirmer l'inexistence d'écoulement moyen dans la cellule II. D'abord parceque les vitesses estimées dans la cellule I sont 10 fois inférieures aux valeurs attendues. Au vu du TABLEAU IV, pour des vitesses si faibles, on est à la limite de résolution de la méthode de mesure. Donc pour avoir une chance de distinguer la trace de l'écoulement moyen dans le bruit turbulent, il faudrait pouvoir placer les émetteur-récepteurs le plus possible dans l'axe de cet écoulement¹⁰. Toutefois, malgré ces apparentes différences de comportement entre les deux cellules, nos mesures nous ont permis de mettre en évidence sur deux décades, une décroissance identique des fluctuations relatives du flux thermique. celle-ci se caractérise par le fait que les fluctuations du flux de chaleur sont approximativement proportionnelles à ΔT . Il importe de noter également que si le flux de chaleur mesuré sur une portion de la cellule ne possède pas une PDF dont la forme est indépendante de la position de mesure et/ou du Ra , les PDF des fluctuations du flux de chaleur suffisamment moyennées spatialement ont une forme indépendante du nombre de RAYLEIGH et non gaussienne. De plus, si par une analyse théorique plus poussée, la modélisation de la dynamique du flux thermique à partir d'une équation stochastique avec un bruit multiplicatif gaussien, s'avère pertinente, cela soulignera l'importance de la prise en compte des interactions du milieu turbulent avec son environnement immédiat. Cela démontrera également la nécessité d'utiliser des conditions aux limites réalistes (potentiellement non stationnaires) dont la dynamique n'est pas indépendante de celle du système turbulent puisqu'elle influence les fluctuations des grandeurs globales mesurées sur ce dernier. Notons cependant que, si la loi de puissance des fluctuations relatives de flux de chaleur reste vraie quelque soit le nombre de RAYLEIGH, ces effets seront d'autant moins importants que la turbulence se développe, puisque ces fluctuations relatives tendent lentement vers 0.

10. Dans notre dispositif les capteurs ont sans doute été placés trop loin de la plaque supérieure de sorte que l'écoulement devait être essentiellement perpendiculaire à l'onde sonore car même en inclinant la cellule pour favoriser un écoulement moyen on n'a pu mettre en évidence aucun décalage DOPPLER.

Bibliographie

- [1] W.V.R. Malkus 1964, "Boussinesq equations and convection energetique", WHOI Geophysical Fluid Dynamics Notes, ref 64-46 chp 2 p 11.
- [2] G.I. Barenblatt 1979, "Similarity, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics", Consultant Bureau New-York.
- [3] X. Chavanne 1997, "Etude du regime turbulent en convection de Rayleigh-Bénard dans l'hélium liquide ou gazeux autour de 5 K", Thèse de l'université Joseph Fourier Grenoble I.
- [4] F.H. Busse 1978, Rep. Prog. Phys., vol 41 p 1929.
- [5] D.C. Threlfall 1975, PhD thesis, Cambridge university.
- [6] B. Castaing, G. Gunaratne, F. Heslot, L. Kadanoff, A. Libchaber, S. Thomae, X.Z. Wu, S. Zaleski and G. Zanetti 1989, J. fluid Mech., vol. 204 p1.
- [7] E.D. Siggia 1994, Ann. Rev. Fluid. Mech., vol. 26 p 137.
- [8] A. Chiffaudel 1989, "Dynamique Spacio-Temporelle de la Convection à Bas Nombre Prandtl" thèse de l'ENS et l'université Paris VII.
- [9] L. Landau et E. Lifchitz 1976, "Physique théorique tome V : physique statistique", Mir Moscou.
- [10] A. Onuki, H. Hao R.A. Ferrell 1990, Phys Rev A, vol 41, n 4, p 2256.
- [11] B. Zappoli, D. Bailly, Y. Garrabos, B. Le Neindre, P. Guenoun and D. Beysens 1990, Phys. Rev. A, vol 41 n 4 p 2264
- [12] M. Salzmann, "Les Capteurs de l'instrument ALICE", Rapport de fin d'étude du DEA instrumentation et mesure.
- [13] W. Merzkirch 1987, "Flow Visualisation", Second edition, Academic Press.
- [14] F. Chilla, S. Ciliberto, C. innocentí, E. Pampaloni 1993, Nuovo Cimento, vol 15 D p 1229.
- [15] A. Michels and J. Hamers 1937, Physica, vol 4, p 995.
- [16] S. Grossmann and D. Lohse 1999, à paraître.
- [17] M. Neufeld et R. Friedrich 1995, Phys. Rev. E, vol 51, n 3, p 2033.
- [18] S Cioni 1996, thèse de doctorat de l'ENS de Lyon.

Chapitre 4

Test de la loi de EVANS, COHEN, MORRISS (“ théorème de GALLAVOTTI–COHEN”) sur quelques systèmes physiques.

4.1 Introduction

Le chapitre d'introduction a présenté l'une des rares théories donnant un résultat quantitatif sur les fluctuations temporelles de puissance dans les systèmes dissipatifs réversibles (i.e. invariants par renversement du temps). L'objet de ce chapitre est d'examiner la validité de cette prédiction dans le cas de systèmes dynamiques dissipatifs “réalistes”, en général non invariants par renversement du temps. D'une manière générale, un système dynamique dissipatif peut se ramener à :

$$\frac{dE(t)}{dt} = P_{inj}(t) - P_{diss}(t) \quad (4.1)$$

avec E l'énergie interne du système, P_{inj} la puissance injectée et P_{diss} la puissance dissipée. L'extension du théorème de GALLAVOTTI–COHEN à ces systèmes concerne la quantité $\epsilon_\tau(t)$ définie à partir de la puissance injectée P_{inj} , lissée sur un intervalle de temps τ , suivant :

$$\epsilon_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} P_{inj}(t') dt' \quad (4.2)$$

pour laquelle on cherche à établir la validité de la relation

$$\log \left(\frac{\pi(\epsilon_\tau)}{\pi(-\epsilon_\tau)} \right) \Big|_{\tau \gg T_c} = \beta \cdot \epsilon_\tau \cdot \tau \quad (4.3)$$

où $\pi(\epsilon_\tau)d\epsilon_\tau$ est la probabilité d'avoir $\epsilon_\tau(t) = \epsilon_\tau$ à $d\epsilon_\tau$ près, T_c , le temps de corrélation typique de P_{inj} et β , une constante. Rappelons de plus que ce résultat n'est exact que pour des modèles de systèmes *thermalisés et réversibles*, c'est-à-dire où une dissipation effective a été introduite pour que (4.1) soit invariante par la transformation $t \rightarrow -t$ et pour que l'énergie interne du système soit constante, donc pour que (4.1) s'écrive $P_{inj}(t) = P_{diss}^{eff}(t)$ à chaque instant.

Dans les références [1, 8], il est montré que l'on peut construire des modèles de systèmes physiques satisfaisant aux conditions d'application du théorème de GALLAVOTTI-COHEN. Nous proposons ici une approche différente. Nous désirons en effet tester la relation (4.3) pour des systèmes dissipatifs quelconques afin de vérifier si elle s'applique. Pour cela, il est nécessaire que ces systèmes présentent d'importantes fluctuations négatives de la puissance injectée pour qu'il existe une probabilité $\pi(-\epsilon_\tau)$ non nulle au moins pour quelques valeurs de τ supérieures à T_c . C'est le cas des systèmes modèles suivants : la chaîne de patins à frottement non linéaire, les "gaz" granulaires 2 D vibrés et le modèle en couches de la turbulence que nous allons étudier dans le paragraphe 2 de ce chapitre.

Les estimations expérimentales de la puissance injectée dans l'écoulement de VON KÁRMÁN, donnent seulement un aperçu de la forme des fluctuations de la puissance injectée par une seule pale. De plus la valeur moyenne de cette puissance n'est pas connue et l'on ne peut pas préciser la présence d'événements où la puissance injectée serait négative¹. On ne peut donc pas tester sur ces mesures le théorème de GALLAVOTTI-COHEN sous sa forme (4.3). Cependant la relation (4.3) peut aussi se comprendre comme l'expression de la convergence vers la valeur moyenne des événements rares négatifs de la trace temporelle de la puissance injectée lorsque celle-ci est intégrée sur des temps de plus en plus long. Dans cet esprit, il peut être intéressant de vérifier si les événements rares des queues de nos distributions expérimentales de puissance injectée suivent une loi analogue à (4.3). En convection nous n'avons pas mesuré directement la puissance injectée mais le flux thermique qui en est très proche. Nous avons pu mesurer les fluctuations et la valeur moyenne de ce flux. Or nous avons constaté qu'il n'existe pas de fluctuations négatives du flux thermique qui nécessiteraient une inversion du gradient de température dans la plaque où sont insérés les capteurs de flux. Cependant, on peut définir à partir de la couche limite thermique un *un flux de chaleur turbulent* permettant d'obtenir des fluctuations négatives du flux. On pourra ainsi étudier d'une façon systématique la convergence de ces fluctuations vers leur moyenne temporelle.

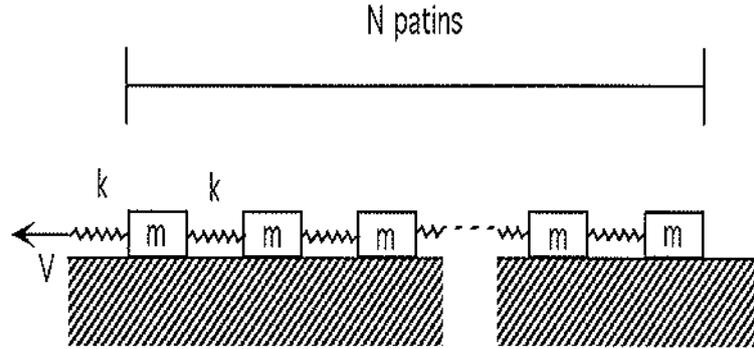


FIG. 4.1 – Schéma de la chaîne de N patins de masse m reliés par des ressorts de constante de rappel k , sur laquelle on tire avec une vitesse constante V . La force de frottement entre le patin i et le sol dépend de la vitesse de ce patin selon la loi : $F(\dot{X}_i) = \frac{F_0}{1+\dot{X}_i/v_c}$ si $\dot{X}_i > 0$ et $F(\dot{X}_i) \in]-\infty, 1]$ si $\dot{X}_i = 0$

4.2 Test du théorème de GALLAVOTTI–COHEN sur des modèles numériques de systèmes dissipatifs.

4.2.1 La chaîne de patins à frottement non linéaire.

Présentation du modèle.

Ce modèle est une simplification de ceux utilisés pour simuler la dynamique des tremblements de terre [2, 3]. Comme le montre la figure 4.1, il s'agit d'une chaîne de patins de masse m , reliés un à un par des ressorts de constante de rappel k et glissant sur une surface avec une force de frottement F dépendant de leur vitesse. On tire sur cette chaîne avec une vitesse constante V et, contrairement au cas présenté en [3], le dernier patin de la chaîne est libre. L'équation décrivant le déplacement, X_i , du $i^{\text{ème}}$ patin par rapport à sa position initiale au repos, est :

$$\begin{cases} m\ddot{X}_i = k(X_{i+1} - 2X_i + X_{i-1}) - F(\dot{X}_i) & \text{si } \dot{X}_i > 0, \\ \dot{X}_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.4)$$

où $F(\dot{X}_i) = F_0 / (1 + \dot{X}_i/v_c)$ [3]. v_c est une vitesse caractéristique de la force de frottement. Les conditions de traction à vitesse constante du premier ressort et de mouvement libre du dernier patin, se traduisent respectivement par les conditions aux limites : $X_0 = Vt$ et $X_{N+1} = X_N$. En utilisant F_0/k comme échelle des déplacements et $\sqrt{m/k}$ pour celle de temps, l'équation (4.4) devient en variables sans dimensions :

$$\begin{cases} \ddot{U}_i = (U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}) - \frac{1}{1+2\alpha U_i} \dot{U}_i & \dot{U}_i > 0. \\ \dot{U}_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.5)$$

1. Les mesures de puissance réalisées sur les moteurs ne montrent pas d'événements négatifs, mais elles sont filtrées de façon conséquente par les moteurs eux-mêmes.

avec $U_i = X_i k / F_o$, $\theta = t \sqrt{k/m}$, respectivement les déplacements et le temps sans dimension, et $2\alpha = V_o / v_c$ où $V_o = F_o / \sqrt{km}$ est la nouvelle échelle de vitesse, le point désignant maintenant la dérivée par rapport à θ . Les conditions aux limites se réécrivent: $U_0 = (V/V_o)\theta$ et $U_{N+1} = U_N$. Nous avons résolu numériquement ces N équations (4.5).

C'est la nature de la force de frottement qui rend ce système particulier. En effet, une fois que le patin i se met à glisser, la force de frottement qu'il subit sera d'autant plus faible qu'il glisse rapidement. C'est donc surtout la contraction du ressort précédent et l'étirement du suivant qui peuvent le ralentir (si les patins $i-1$ ou $i+1$ vont moins vite). Cependant, la contraction (resp. l'étirement) du ressort précédent (resp. suivant) va accélérer ou faciliter la mise en mouvement du patin $i-1$ (resp. $i+1$). Les patins ont donc tendance à glisser par bloc. Seul la traction du premier ressort à vitesse constante contraint ce phénomène. Cela confère à ce système la propriété de *criticalité auto-organisée* [3]. C'est également ce qui permet d'obtenir des instants où l'opérateur qui tire sur la chaîne à vitesse constante va recevoir beaucoup d'énergie de celle-ci, c'est à dire que de temps en temps, il est brutalement poussé par la chaîne lorsque les patins contractent le premier ressort. On aura bien alors les événements intenses de puissance injectée négative désirés. Pour obtenir les expressions de la puissance injectée P_{inj} , de la puissance dissipée P_{diss} et de l'énergie interne E , on multiplie (4.5) par \dot{U}_i et on somme sur les N patins de la chaîne. On obtient alors une expression semblable à (4.1) en prenant :

$$P_{inj}(\theta) = v/V_o(U_1(\theta) - U_2(\theta)) \quad (4.6a)$$

$$P_{diss}(\theta) = \sum_{i=1}^N \frac{\dot{U}_i(\theta)}{1 + 2\alpha U_i(\theta)} \quad (4.6b)$$

$$E(\theta) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N \dot{U}_i(\theta)^2 + \sum_{i=0}^N (U_{i+1}(\theta) - U_i(\theta))^2 \right] \quad (4.6c)$$

Notons dès à présent que, si $P_{inj}(\theta)$ peut être négatif, puisqu'il suffit que le déplacement de second patin soit supérieur à celui du premier, par contre, puisque d'après (4.5) on a toujours $\dot{U}_i(\theta) \geq 0$, on aura toujours $P_{diss}(\theta) \geq 0$. On n'est donc pas dans un cas où le théorème de GALLAVOTTI-COHEN s'applique en toute rigueur. Il n'est pas exclu néanmoins que la relation (4.3) soit vérifiée. Mais avant de nous y intéresser soulignons quelques caractéristiques de ce modèle.

Quelques propriétés remarquables.

La non linéarité introduite dans la force de frottement, par la propriété criticalité auto-organisée qu'elle entraîne, va poser des problèmes lorsqu'on s'intéresse à la limite thermodynamique de ce système. En effet, si on considère le nombre de degrés de liberté de la chaîne proportionnel au nombre N de patins, alors on s'attend, d'après la loi des grands nombres, à une décroissance des fluctuations de grandeurs macroscopiques en $\sigma(A)/\bar{A} \propto 1/\sqrt{N}$ où A peut être par exemple :

- l'étirement de la chaîne $L = U_1 - U_N$,

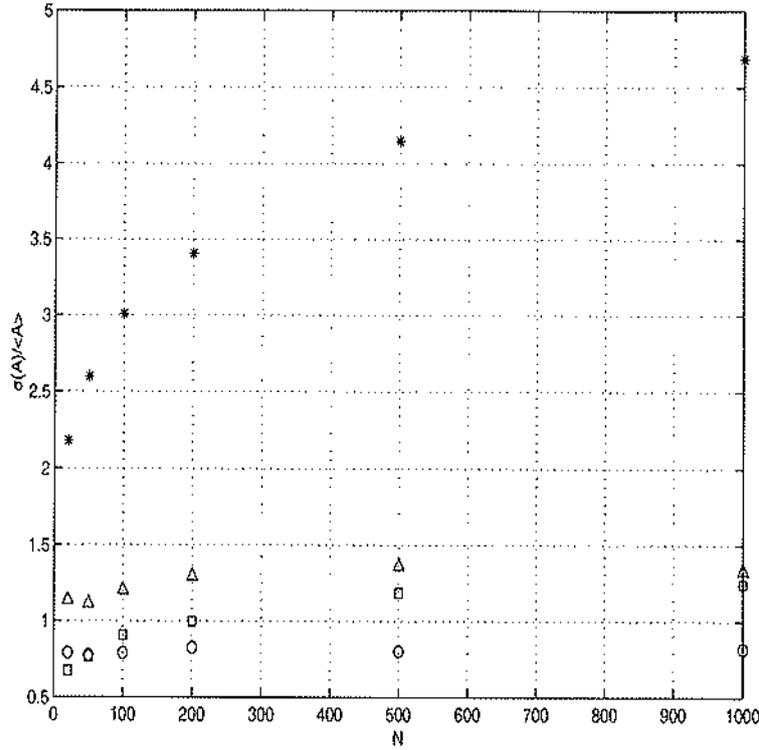


FIG. 4.2 – Evolution du rapport entre l'écart type et la valeur moyenne : de l'énergie interne E (\circ), de la longueur d'éirement L (\triangle), de la puissance injectée P_{inj} (\square) et dissipée P_{diss} ($*$) en fonction du nombre de patins N .

- l'énergie interne E
- la puissance dissipée P_{diss}
- la puissance injectée P_{inj} .

La figure 4.2 montre l'évolution du rapport de l'écart type des fluctuations de E , L , P_{inj} et P_{diss} , sur leur valeur moyenne. Les fluctuations relatives non seulement ne diminuent pas mais celles de P_{inj} et P_{diss} ont tendance à augmenter avec le nombre de patins. Celles de E et L restent à peu près constantes. Par ailleurs, ce rapport est loin d'être petit devant 1. Les valeurs moyennes de E , P_{inj} , P_{diss} sont donc loin d'être suffisantes pour décrire un tel système. On comprend d'autant mieux ce problème de limite thermodynamique si on regarde les PDF de ces grandeurs.

La figure 4.3 présente ces PDF pour 100 patins. Contrairement aux prévisions du théorème central limite, ces PDF sont loin d'être gaussiennes². Notamment remarquons que l'énergie interne (courbe 4.3A en axes semi-logarithmiques) et les valeurs négatives de l'éirement (courbe 4.3B en axes semi-logarithmiques également) décroissent exponentiellement alors que la puissance dissipée

2. La distribution de la somme de seulement 6 variables aléatoires, indépendantes, uniformément réparties entre 0 et 1, est déjà pratiquement gaussienne.

(courbe 4.3D en axes log-log) suit plutôt une loi de puissance. Tous ces résultats restent vrais pour un nombre de patins plus grand. De plus, on notera sur le TABLEAU I que la valeur moyenne de l'étirement n'est pas nulle : la chaîne en traction est en moyenne plus longue qu'elle ne l'est à l'équilibre au repos. Le TABLEAU I donne également la valeur moyenne et l'écart type de ces quatre variables macroscopiques pour différentes valeurs de N . On y retrouve le fait que la puissance injectée et la puissance dissipée sont égales en moyenne. On y remarque que l'énergie interne moyenne ou la longueur de la chaîne moyenne en traction ne semble pas être des variables extensives. On a par exemple une loi en $\bar{E} \propto N^{2,23}$ sur les deux décades en N que nous avons étudiées.

N	20	50	100	200	500	1000
\bar{E}	118,53	889,8	4 267,5	$2,02 \cdot 10^4$	$1,67 \cdot 10^5$	$7,014 \cdot 10^5$
$\sigma(E)$	93,58	689,7	3 368,6	$1,61 \cdot 10^4$	$1,34 \cdot 10^5$	$5,747 \cdot 10^5$
\bar{L}	33,31	152,9	459,1	1 347,6	6 008,1	$1,737 \cdot 10^4$
$\sigma(L)$	37,82	170,3	551,2	1 744,9	8 185,9	$2,310 \cdot 10^4$
\bar{P}_{inj}	0,491	0,822	1,158	1,639	2,506	3,539
$\sigma(P_{inj})$	0,330	0,631	1,049	1,640	2,962	4,407
\bar{P}_{diss}	0,492	0,824	1,159	1,642	2,500	3,544
$\sigma(P_{diss})$	1,073	2,141	3,484	5,596	10,369	16,610

TABLEAU I Valeurs moyennes et écarts types de l'énergie interne E , la longueur d'étirement de la chaîne L , la puissance injectée P_{inj} et dissipée P_{diss} pour différentes valeurs de N . On a pris $\alpha = 0,5$ et $V/V_o = 0.1$

Ce comportement tient au fait que tous les patins de la chaîne sont très corrélés entre eux à cause de leur tendance à glisser par blocs. On peut chercher s'il existe un nombre J de patins au delà duquel les positions de deux patins distants de plus de J sont indépendantes, en cherchant pour quel $i \in [1, N]$:

$$C(i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{1}{C_o} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \sum_{k=1}^{N-i} (U_k(t') - \bar{U}_k)(U_{k+i}(t') - \bar{U}_{k+i}) dt', \quad (4.7)$$

avec

$$C_o = \frac{1}{T} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \sum_{k=1}^{N-i} (U_k(t') - \bar{U}_k)^2 dt',$$

devient petit devant 1. Or la figure 4.4 montre que pour 100 patins si on moyenne sur des temps suffisamment longs, non seulement $C(i)$ n'est jamais petit mais devient indépendant de i . Cela tient au fait que les événements intenses des variables dynamiques, qui dominent les statistiques au temps long, impliquent le mouvement de l'ensemble des patins de la chaîne. Ce résultat reste vrai avec une chaîne plus longue, mais la convergence est encore plus lente. Pour le voir d'une autre façon, on a représenté figure 4.5 la trace temporelle de L , E , P_{inj} , P_{diss} . On y voit clairement que les événements intenses de E , P_{inj} , P_{diss} arrivent précisément au moment où la chaîne subit une brutale contraction ce qui suppose le glissement simultané d'un grand nombre de patins (dont le dernier). Toutes les variables dynamiques sont donc très corrélées. On retrouve ce résultat en

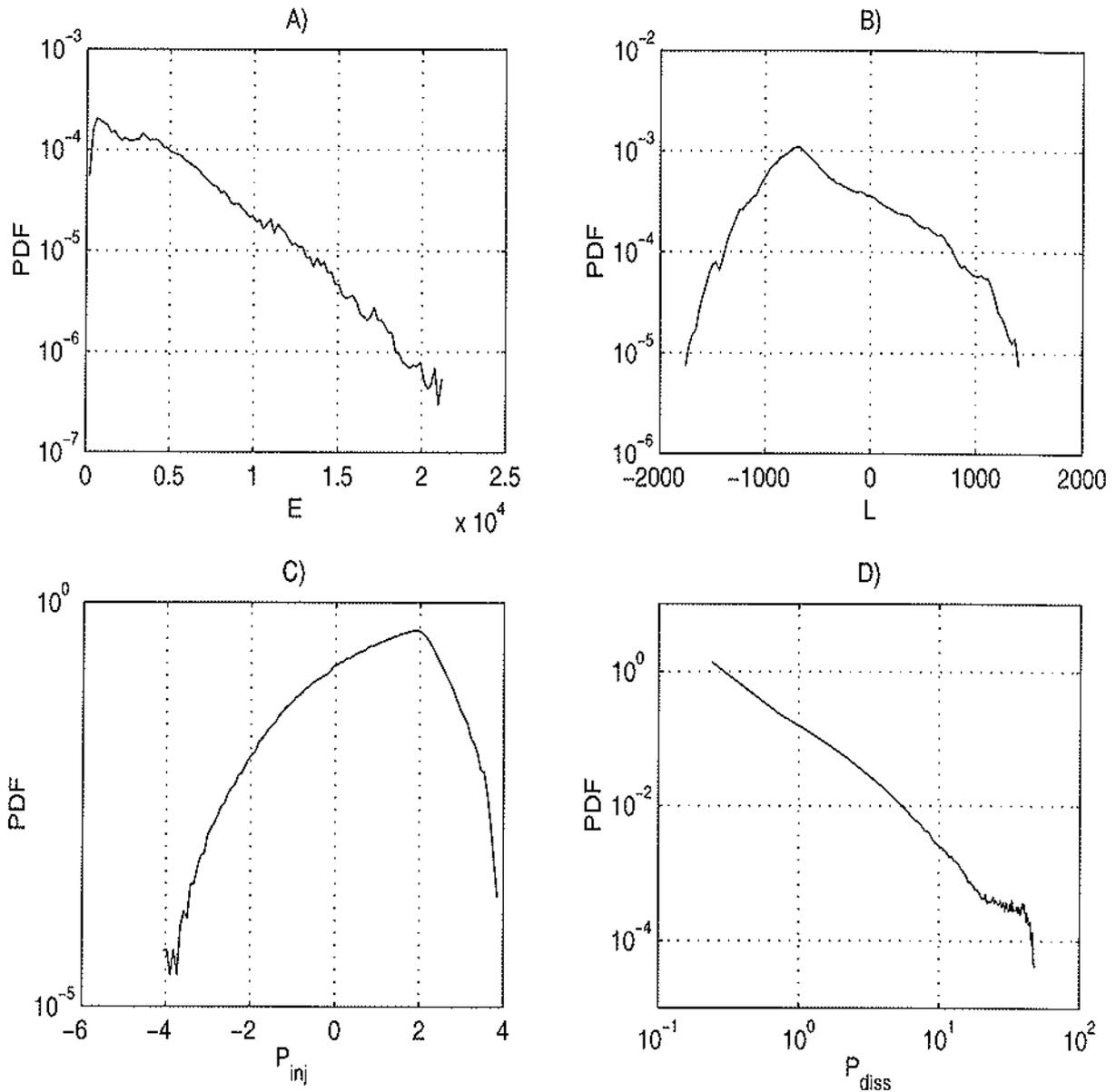


FIG. 4.3 – PDF pour 100 patins de : A) l'énergie interne E , B) l'éirement L , C) la puissance injectée P_{inj} et D) la puissance dissipée P_{diss} . On a pris $\alpha = 1/2$, et $V/V_o = 0,1$.

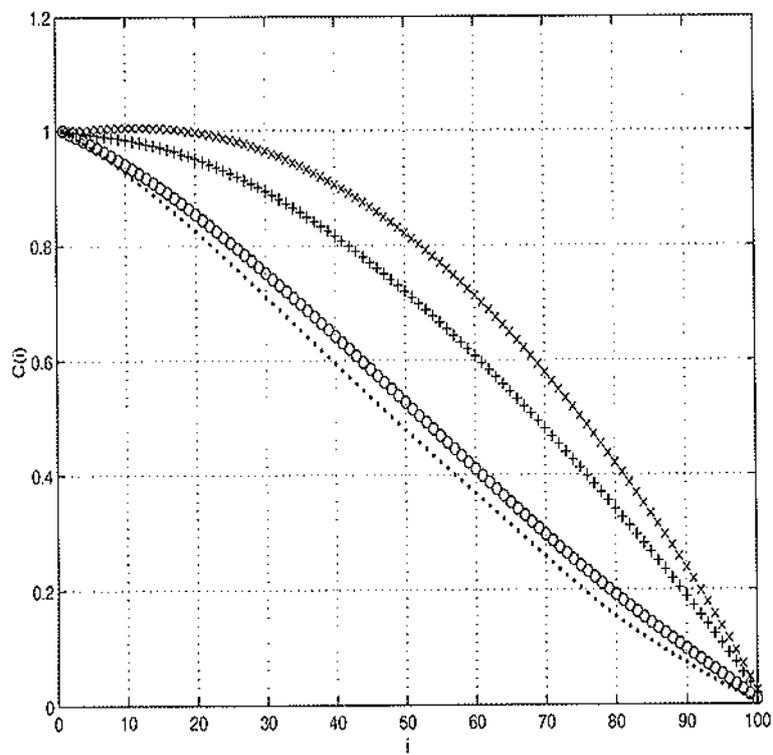


FIG. 4.4 – Fonction de corrélation entre les patins $C(i)$ pour une chaîne de 100 patins. Cette fonction est moyennée sur 25 000 (\dots), 500 000 ($\circ\circ\circ$), 2 500 000 ($+++$) et 20 000 000 ($\times\times\times$) pas de temps de calcul.

regardant l'extremum de la fonction de corrélation croisée :

$$C_{LA}(\theta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{1}{\sigma(L)\sigma(A)} \int_0^T (L(t') - \bar{L}) (A(t' + \theta) - \bar{A}) dt'$$

où A peut être l'énergie interne, la puissance dissipée ou injectée. Le TABLEAU II donne la valeur de ces extrema ainsi que les temps θ_c auxquels ils arrivent. On y voit clairement que l'énergie interne E et la puissance injectée P_{inj} sont très anticorrélées avec l'étirement et que la puissance injectée l'est de façon quasi instantanée. On peut aussi s'intéresser à la phase déroulée du spectre croisé entre L et la puissance injectée. Elle est constante sur de grandes plages de fréquences et vaut un multiple de π , ce qui signe bien une anticorrélation entre ces deux variables.

	C_{LE}	$C_{LP_{inj}}$	$C_{LP_{diss}}$
extremum	-0,61	-0,61	0,103
$\theta_c/T_c(L)$	0,9981	-0,0097	-0,0375

TABLEAU II Extréma des fonctions de corrélation croisée de L et E , L et P_{inj} , L et P_{diss} pour une chaîne de 500 patins ($V/V_0 = 0,1$, $\alpha = 1/2$). Les temps de corrélation maximum sont divisés par le temps de d'autocorrélation de L , i.e le temps au bout duquel la fonction d'autocorrélation de L est diminuée de moitié.

Le nombre de patins ne représente donc pas un nombre de degrés de liberté *indépendant*.

Pour qu'il en soit ainsi, on peut introduire un bruit sur le seuil de glissement de l'équation (4.5). Le rapport de l'écart type et de la valeur moyenne est alors plus petit que dans le cas non bruité. Cependant, pour le nombre de patins que nous avons étudié (inférieur ou égal à 2000) et tant que le bruit sur le seuil de glissement est petit, la trace temporelle de la puissance injectée n'est pratiquement pas modifiée. On n'a donc pas étudié ce cas par la suite.

Accord avec les prédictions du théorème de GALLAVOTTI-COHEN.

Pour vérifier si la relation (4.3) s'applique à ce modèle, on a calculé la moyenne glissante de $U_1 - U_2$, qui est directement proportionnelle à la puissance injectée, sur différents intervalles τ

$$\epsilon_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} [U_1(t') - U_2(t')] dt'.$$

Pour chaque signal $\epsilon_\tau(t)$ ainsi calculé, on trace $1/\tau \log \left[\frac{\pi(\epsilon_\tau)}{\pi(-\epsilon_\tau)} \right]$ en fonction de ϵ_τ . Les courbes obtenues pour différentes valeurs de τ sont regroupées figure 4.6. On y constate que, dès que τ dépasse $10T_c$, avec T_c le temps d'autocorrélation de $(U_1 - U_2)$, on a un bon accord avec la relation (4.3).

La pente β de la droite sur laquelle se superposent les courbes de la figure 4.6 n'est pas quelconque dans le théorème de GALLAVOTTI-COHEN³. En tenant compte de la vitesse de traction

3. Dans l'exemple donné en introduction, c'est l'inverse des 2/3 de l'énergie cinétique moyenne par particule.

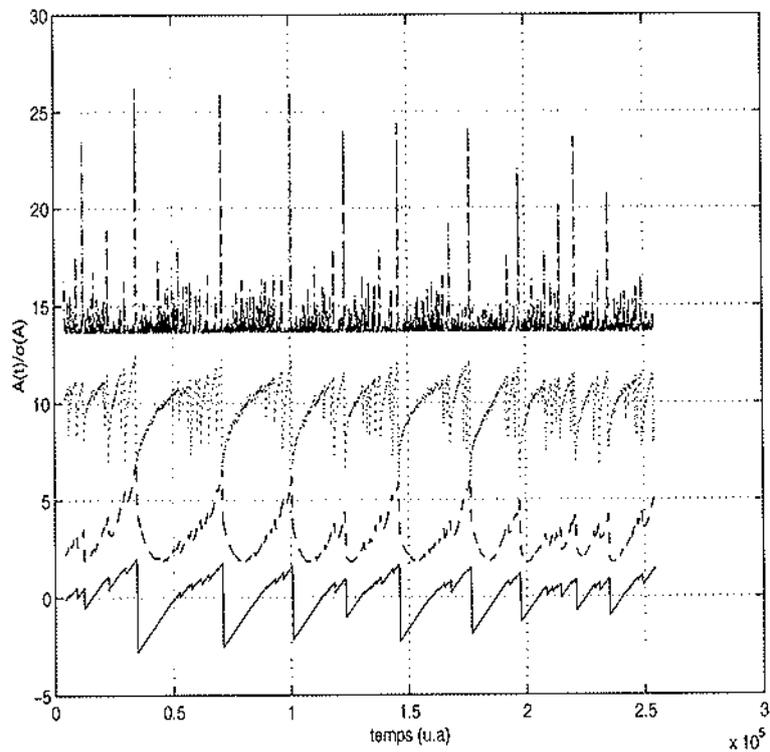


FIG. 4.5 – Trace temporelle de l'étrirement L (—), de l'énergie interne E (---), de la puissance injectée (···) et dissipée (- · -), dans une chaîne de 500 patins avec une vitesse de traction adimensionnée de $V/V_0 = 0,1$ et $\alpha = 0,5$. Pour faciliter la comparaison les signaux ont été normés par leur écart type et décalés verticalement d'une valeur arbitraire

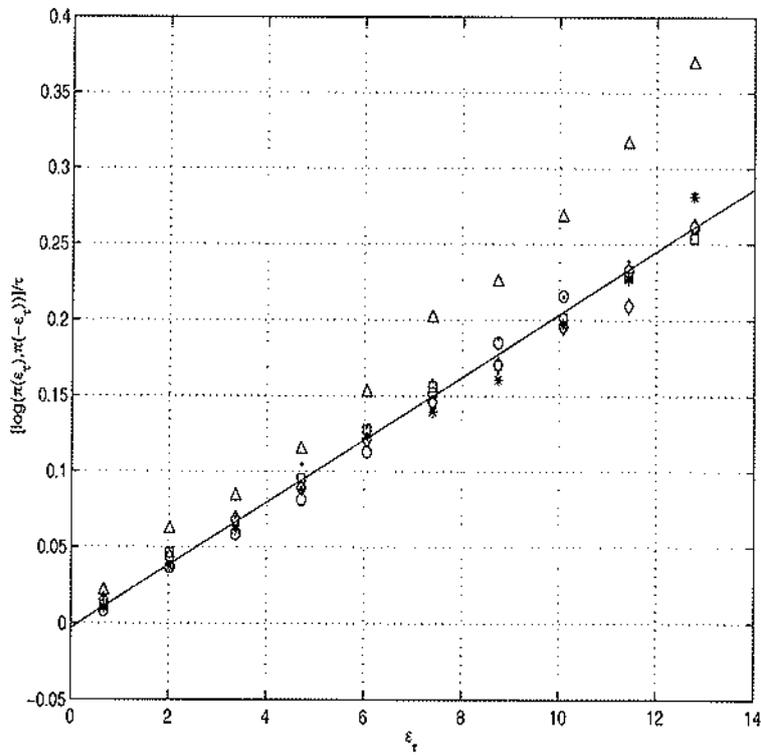


FIG. 4.6 - Vérification des prédictions du théorème de GALLAVOTTI-COHEN pour une chaîne de 200 patins, avec une vitesse de traction sans dimension de 0,1 et $\alpha = 1/2$. On a tracé $\frac{1}{\tau} \log \left[\frac{\pi(\epsilon_\tau)}{\pi(-\epsilon_\tau)} \right]$ en fonction de ϵ_τ pour $\tau = 6T_c$ (Δ), $10T_c$ (\cdot), $12T_c$ (\square), $14T_c$ (\diamond), $16T_c$ ($*$), $20T_c$ (\circ). T_c est le temps d'autocorrélation de la puissance injectée. On a $T_c = 1500$ en unité adimensionnée

($V/V_0 = 0, 1$) et de la valeur de T_c ce facteur vaut $1,4 \cdot 10^{-4}$ pour la figure 4.6. Le TABLEAU III donne la valeur des quantités sans dimension que l'on peut construire avec β et : \overline{E} , \overline{E}_c , $\overline{P_{inj}}T_c, \dots$, avec \overline{E}_c l'énergie cinétique moyenne pour différents nombres de patins. A la limite thermodynamique, on s'attend à avoir à l'équilibre : $\overline{E}_c\beta = N/2$ (car on a une seule direction spatiale, celle de traction). En fait lorsqu'on fait varier le nombre de patins, le produit $\beta\overline{E}_c$ diminue mais $\beta\overline{E}$ reste à peu près constant (autour de trois pour $N \leq 100$). Si on considère que c'est toute l'énergie interne E , i.e. l'énergie dont la dérivée temporelle est égale à la différence de la puissance injectée et de la puissance dissipée, qu'il faut prendre en compte, alors l'indépendance du produit $\beta\overline{E}$ vis à vis de N peut s'expliquer par la forte corrélation qui existe entre les patins de toute la chaîne. Si il faut considérer le nombre de degrés de liberté indépendants du système pour retrouver une expression de β analogue à celle de la thermodynamique à l'équilibre, celui-ci peut très bien être différent du nombre de patins dans la chaîne.

N	20	50	100	200	500	1000
$\beta/\overline{P_{inj}}T_c$	1,141	0,734	0,443	0,338	0,2587	0,2648
$\beta\overline{E}_c$	0,089	0,052	0,028	0,019	0,011	0,0089
$\beta\overline{E}$	3,93	3,74	2,94	2,83	2,92	3,33

TABLEAU III Comparaison du produit de β avec les moyennes de : la puissance injectée multipliée par le temps d'autocorrélation T_c , l'énergie cinétique totale, de l'énergie interne totale. On considère les cas de N patins tractés à la vitesse adimensionnée de 0,1 et où $\alpha = 1/2$.

De plus, si on trace le logarithme de \overline{E} , \overline{E}_c , $\overline{P_{inj}}$, \dots en fonction de celui de N on voit apparaître clairement des lois de puissance sur la décade où nous avons fait nos simulations. Les exposants qu'on en déduit sont reportées dans le TABLEAU VI. Cela confirme que $\beta\overline{E} \approx N^0$. Notons par ailleurs que $\overline{P_{inj}}$ croît comme la racine de N et que le temps d'autocorrélation croît plus vite que N , ce qui nécessite d'effectuer des simulations particulièrement longues aux grands N pour avoir un échantillonnage statistiquement équivalent à ceux à petits nombres de patins.

	$\beta \propto N^\gamma$	$\overline{E} \propto N^\gamma$	$\overline{E}_c \propto N^\gamma$	$\overline{P_{inj}} \propto N^\gamma$	$T_c \propto N^\gamma$
γ	-2,29	2,23	1,68	0,50	1,4

TABLEAU IV : Exposant des lois de puissance entre β , \overline{E} , \overline{E}_c , $\overline{P_{inj}}$, T_c et N .

La figure 4.7 présente les PDF de ϵ_τ à partir desquelles ont été déterminées les probabilités $\pi(\pm\epsilon_\tau)$ précédentes. Ces PDF sont loin d'être gaussiennes dans la zone de mesure de ϵ_τ . On ne peut donc pas invoquer ce fait pour expliquer la figure 4.6⁴. Pour ce système les histogrammes $\epsilon_\tau(t)$ gardent longtemps la trace des fluctuations de P_{inj} . De plus, pour toutes les quantités mesurées, la convergence vers la valeur moyenne est lente (voir la convergence de $C(i)$). Ainsi le rapport de $\sigma(\epsilon_\tau)/\overline{P_{inj}}$ vaut encore 10% pour $\tau = 100T_c$! (mais cela rend ce système particulièrement pratique pour tester la loi E.C.M.)

4. Pour des gaussiennes la relation (4.3) est toujours vérifiée (cf introduction).

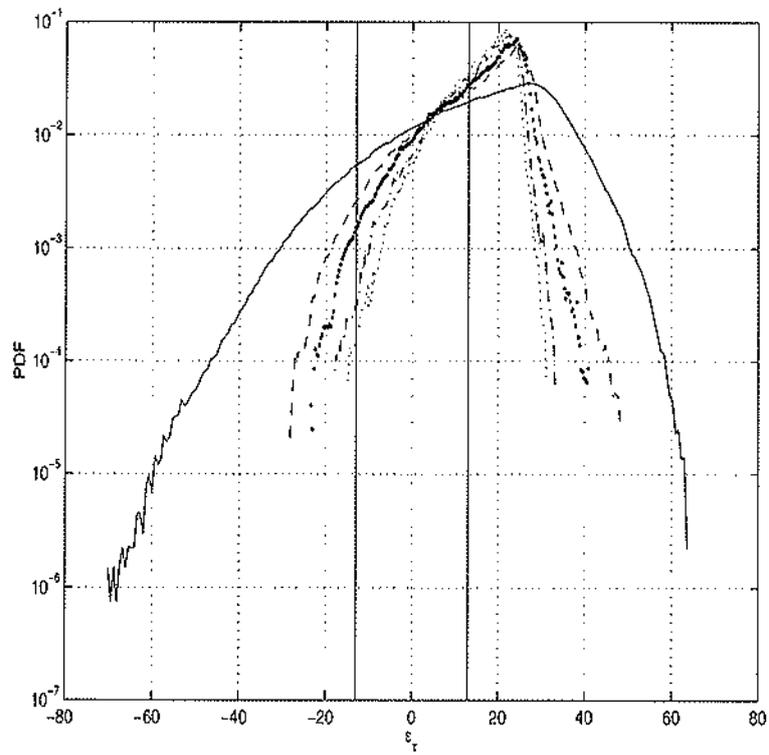


FIG. 4.7 - PDF de la puissance injectée (---) et de ϵ_τ pour $\tau = 6T_c$ (- - -), $10T_c$ (•••), $16T_c$ (- · -), $20T_c$ (···). Les traits verticaux délimitent la zone où l'on a calculé $\pi(\pm\epsilon_\tau)$.

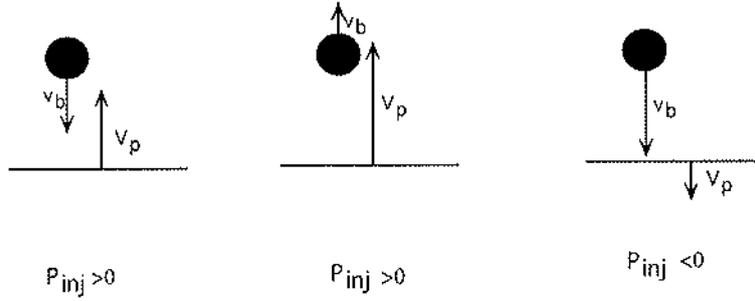


FIG. 4.8 — Schéma du principe de l'énergie fournie à une bille par une paroi vibrante. V_p est la vitesse de la paroi, v_b celle de la bille.

4.2.2 Le milieu granulaire vibré.

Le cas d'une bille

Présentation du modèle.

Le milieu granulaire dissipatif vibré le plus élémentaire est constitué d'une bille rebondissant de manière inélastique sur un piston vibrant de masse infinie (cf figure 4.8). Ce système présente un régime chaotique qu'il atteint par doublement de période [4]. Entre deux collisions, la bille, de vitesse v_b , est soumise seulement à la force de gravité et suit donc une trajectoire ballistique. Au moment des chocs, on modélise la dissipation d'énergie par un coefficient de restitution r qui est le rapport du module des vitesses relatives entre la bille et la paroi après et avant choc : $(V_p' - v_b')^2 = r^2(V_p - v_b)^2$, où on prime la valeur des quantités (vitesse, énergie,...) définies après le choc et avec V_p la vitesse du piston. Cette dernière n'est pas modifiée lors du choc puisque la masse du piston est supposée infinie devant celle de la bille. On en déduit la vitesse de la bille après le choc :

$$v_b' = -rv_b + (1+r)V_p. \quad (4.8)$$

La variation d'énergie cinétique lors d'un choc s'écrit :

$$\begin{aligned} E_c' - E_c &= m_b(v_b'^2 - v_b^2)/2 \\ &= m_b [V_p(1+r)(V_p - v_b) - (1-r^2)(V_p - v_b)^2/2], \end{aligned} \quad (4.9)$$

avec $E_c = M_p V_p^2/2 + m_b v_b^2/2$ l'énergie cinétique totale. Le premier terme du membre de droite de cette dernière équation représente l'énergie fournie à la bille, E_f , lors d'un choc. On voit que ce terme est négatif pour les collisions où on a $V_p < v_b$ (cf figure 4.8). Le dernier terme de (4.9) qui représente l'énergie dissipée lors du choc, E_d , est quant à lui, toujours positif. Cela se retrouve sur les PDF de la figure 4.9. On n'est donc pas dans système où s'applique l'hypothèse chaotique du théorème de GALAVOTTI-COHEN. On peut cependant étudier la décroissance des fluctuations de l'énergie injectée pour voir si son comportement est en contradiction avec les prévisions du

théorème. Remarquons que les valeurs moyennes, de l'énergie fournie à la bille et dissipée par elle, sont bien pratiquement égales. On a : $\overline{E_f} = 29,065 J/kg$ et $\overline{E_d} = 29,097 J/kg$.

Un problème lié à ce modèle est que l'on suppose la collision instantanée. En toute rigueur, il faudrait tenir compte d'un temps de collision pour pouvoir introduire des puissances. On peut supposer que ce temps est ici égal au pas de temps de calcul numérique. L'équation entre puissance et variation d'énergie interne est alors l'équation (4.9) divisée par ce pas de temps. Mais cette approche risque de compliquer l'interprétation de la constante qui apparaît dans le théorème de GALLAVOTTI-COHEN.

Accord avec le théorème de GALLAVOTTI-COHEN.

Nous n'avons enregistré les échanges d'énergie que lorsqu'ils ont lieu, c'est à dire lors des collisions bille-paroi. Comme ces collisions ne se suivent pas à intervalle régulier, il nous faut définir la moyenne glissante de l'énergie injectée de manière un peu différente c'est à dire à partir du nombre de collisions :

$$\epsilon_n(i) = \frac{\sum_{j=i}^{i+n} V_p^j (1+r)(V_p^j - v_b^j) \Delta t_j}{\sum_{j=i}^{i+n} \Delta t_j} \quad (4.10)$$

V_p^j, v_b^j sont respectivement les vitesses de la paroi et de la bille avant la j^{eme} collision et $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ est l'intervalle de temps entre la $j^{eme} - 1$ et la j^{eme} collision. On a tracé figure 4.10

$$\frac{1}{n\Delta t} \log \left[\frac{\pi(\epsilon_n)}{\pi(-\epsilon_n)} \right]$$

en fonction de ϵ_n . Pour $n > 9$, on voit un alignement tout à fait satisfaisant suivant une droite de pente : $\beta = 8,5 \cdot 10^{-3}$. Cela correspond à un peu moins du double de l'inverse de la valeur moyenne de l'énergie cinétique de la bille au moment du choc multipliée par l'intervalle de temps moyen entre collision : $2/(v_b^2 \Delta t) = 4,4 \cdot 10^{-3}$. Par analogie avec la thermodynamique, on se serait attendu à avoir $\beta v_b^2 \Delta t / 2 = 1/2$ plutôt que 2. Cependant, notons que cette valeur est proche de celle trouvée pour les patins.

Bien que l'histogramme initial de la puissance injectée soit proche d'une gaussienne (cf figure 4.9), les courbes 4.10 ne résultent pas du fait que l'on considère des bruits gaussiens dont l'écart type varierait en $1/\sqrt{n}$. En effet, comme le montre la figure 4.11 les PDF de ϵ_n ne sont plus du tout gaussiennes. Dans la zone où on a estimé les probabilités $\pi(\epsilon_n)$ ces PDF sont plutôt des exponentielles. En faite, de fortes corrélations temporelles peuvent exister dans le signal initial, gaussien, de puissance injectée, i.e. la distribution gaussienne des amplitudes du signal n'implique pas nécessairement qu'il soit sans corrélations. Auquel cas, aucune prédiction n'est possible quant à la forme des PDF après lissage.

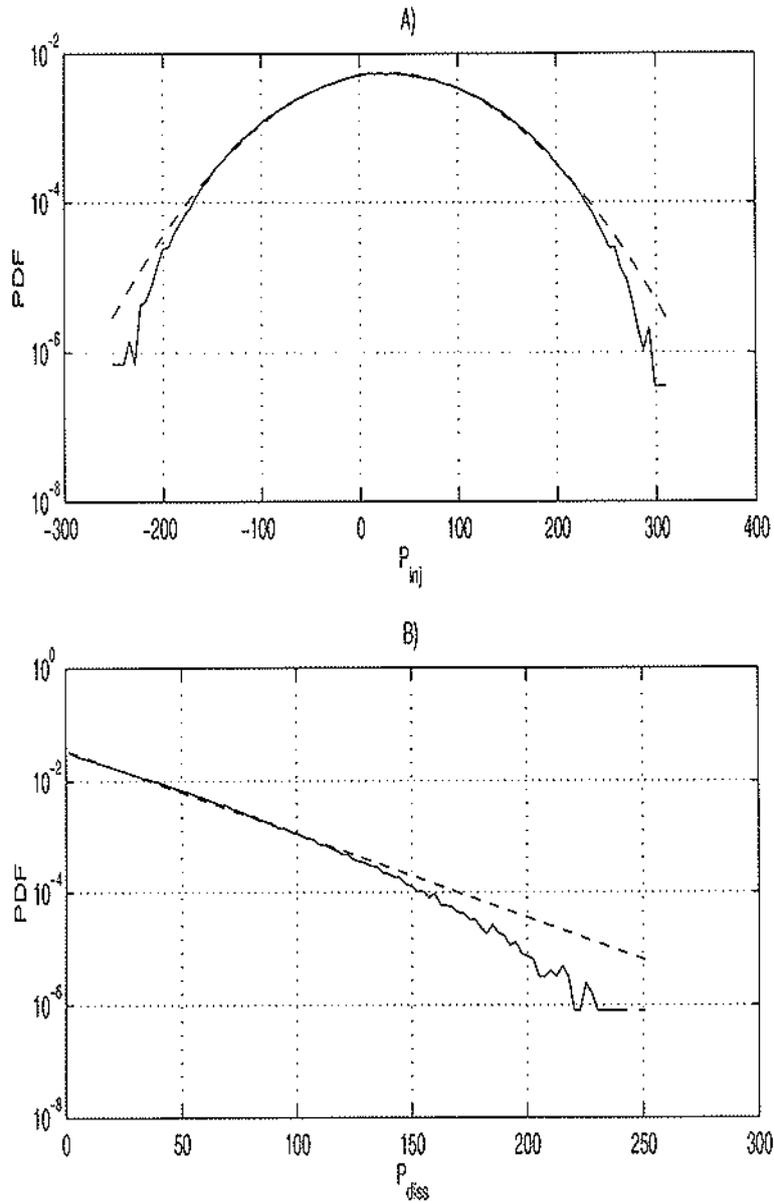


FIG. 4.9 – Fonctions de densité de probabilité des fluctuations de l'énergie échangée lors des collisions paroi-bille. La courbe A) représente l'énergie fournie par le piston à la bille ainsi que la gaussienne de même écart type (tiret). La courbe B) est la PDF de l'énergie dissipée. Les tirets représentent la distribution de POISSON de même moyenne : $\exp(-P_{diss}/\overline{P_{diss}})/\overline{P_{diss}}$. Ces courbes sont obtenues pour une vibration de la paroi d'amplitude de 1,41 cm, une fréquence de 32 Hz et pour un coefficient de restitution de 0,85.

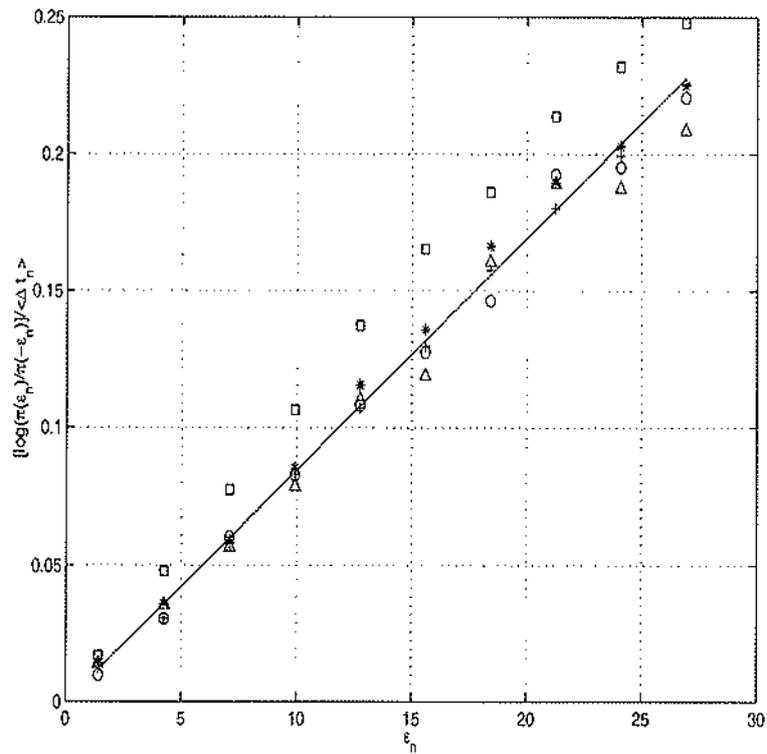


FIG. 4.10 – Test de la formule de GALLAVOTTI–COHEN pour un système dissipatif constitué d’une bille rebondissant sur un plan vibrant. Le plan oscille avec une amplitude de 1,41 cm et une fréquence de 32 Hz. Les symboles correspondent à : $n=6$ (\square), $n=10$ (*), $n=12$ (+), $n=15$ (\circ) et $n=17$ (Δ), où n est le nombre de collisions successives sur lequel on moyenne E_f .

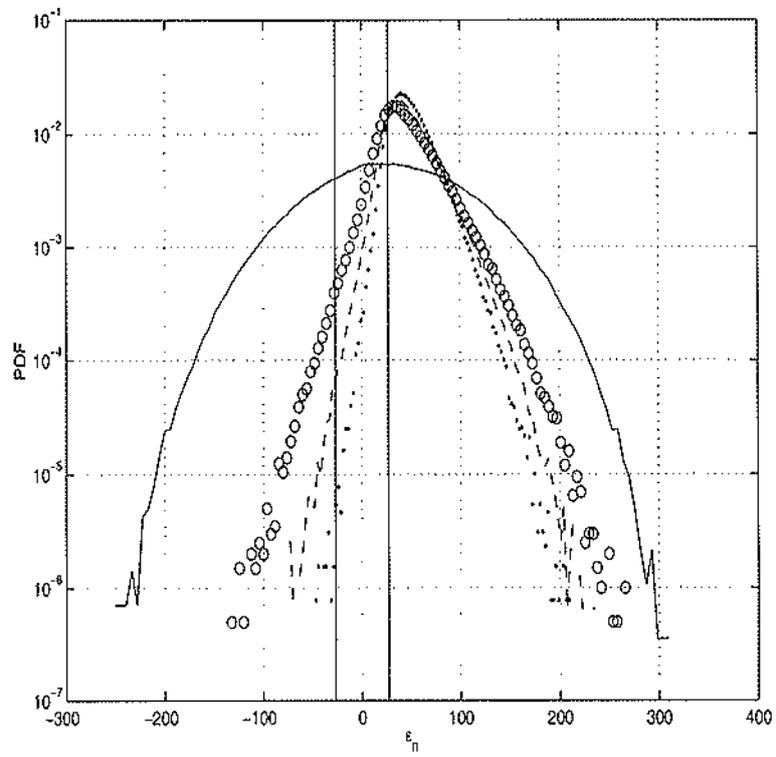


FIG. 4.11 — PDF de l'énergie fournie à la bille (—), et de ϵ_n pour $n=6$ (○○○), $n=10$ (---) et $n=15$ (···).

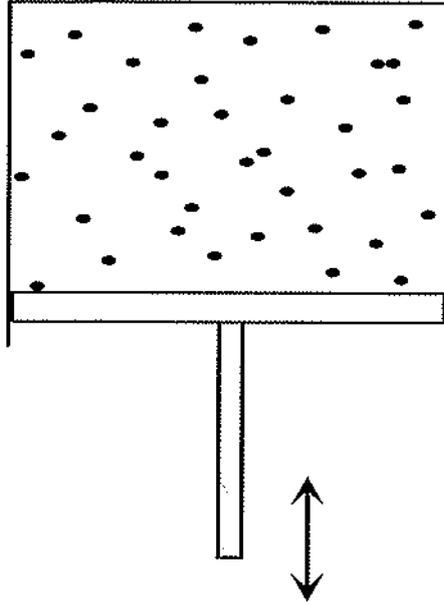


FIG. 4.12 – Schéma du milieu granulaire vibré de dimension 2. On a représenté le système tel qu'il a été simulé. La dimension de la boîte est de 50 rayons de disque. La vibration du piston se fait à une fréquence qui correspond à la fréquence d'échantillonnage pour une amplitude de 1 diamètre de disque.

Le cas de N billes.

Présentation du système.

On considère maintenant un milieu granulaire composé de disques indéformables, identiques, confinés, où l'énergie est dissipée lors des chocs entre disques. Cette dissipation est, là aussi, modélisée par le coefficient de restitution, r , qui est ici le rapport entre la norme de la vitesse relative après le choc sur la norme de la vitesse relative avant choc, dans le référentiel du centre de masse d'une collision binaire. Pour compenser cette perte lors des collisions, le mouvement est entretenu par la vibration d'une des parois de la boîte confinant le milieu (cf figure 4.12).

La puissance est injectée dans le milieu lors des collisions entre la paroi vibrante et les disques. Les événements négatifs de la puissance injectée ont la même origine que précédemment à ceci près que les collisions paroi–disque sont ici considérées comme élastiques. Elles ne dissipent pas. Notons qu'en diminuant la dissipation lors des chocs ($r \rightarrow 1$), pour une même excitation, on augmente la vitesse des disques, par conséquent, on augmente la fréquence et l'intensité des événements négatifs de puissance injectée. En mettant une légère composante de gravité perpendiculairement à la surface vibrante, on augmente également le nombre de ces événements puisqu'on favorise les vitesses de billes négatives inférieures à V_p .

Pour le moment, nous n'avons fait varier de façon systématique que le coefficient de restitution.

Des simulations ont été faites pour $r = \{0, 9; 0, 95; 0, 99\}$. Nous avons considéré dans ce qui suit essentiellement des cas avec une gravité $g=0,2$ en unité de rayon de disque. On a suivi la dynamique de 100 disques enfermés dans une boîte de dimension 50 par 50 rayons de disque. La vibration d'une des parois de la boîte, dont une demi-période est approximée par une parabole, à une amplitude 3 rayons de disque pour une période, T , correspondant à 1 temps d'échantillonnage. Pour cette excitation, avec cette acquisition régulière des données, il arrive qu'entre 2 mesures il n'y ait pas eu puissance injectée, i.e sur une période, il se peut qu'il n'y ait aucun choc de disque sur la paroi vibrant (surtout à faible r). Cela augmente artificiellement les probabilités d'avoir une puissance injectée nulle, par rapport au résultat que l'on obtiendrait en n'effectuant une mesure qu'à chaque collision disque-paroi vibrante. C'est ce qui explique le pic autour de zéro dans la PDF de la puissance injectée de la figure 4.13. Ce pic est moins important en présence de gravité que sans⁵. Outre la puissance injectée, ont été estimées : l'énergie interne, la puissance dissipée, la pression sur la paroi supérieure et une paroi latérale. Les résultats présentés ci-après utilisent les données de simulations réalisées par Mc Namara [5]. Un million d'acquisitions pour chaque variable ont été faites à chaque simulation.

Application du théorème de GALLAVOTTI-COHEN.

On se propose, comme précédemment, de calculer un ϵ_τ afin de voir s'il suit la loi E.C.M. Si on compare le temps de vol libre des disques, $t_l \approx 1 / (n \cdot 2 \cdot \sqrt{E_c})$, où $n = 1/25$ est la densité de disques (dont le diamètre est 2 rayons de disque !), on a toujours $0, 2T \leq t_l \leq 0, 6T$. Sachant qu'on a rarement plus d'une collision disque-paroi vibrante par période, un disque subit plusieurs collisions avec d'autres disques, entre deux collisions avec la paroi vibrante. Donc deux mesures de puissance injectée successives sont décorréelées. On retrouve cela sur les fonctions d'autocorrélation de P_{inj} qui tombent à zéro sur un pas de temps. Cela entraîne une forte décroissance des fluctuations dès qu'on lisse ϵ_τ sur une période supplémentaire. Ainsi, comme le montre les PDF de ϵ_τ figure 4.13 pour $r = 0, 95$, après intégration sur 5 périodes, il ne reste presque plus de fluctuations négatives de ϵ_τ .

Par contre, à l'exception du premier point, décalé à cause de la surestimation des événements nuls, la formule issue du théorème de GALLAVOTTI-COHEN est aussi vérifiée directement par la puissance injectée non lissée⁶. En effet, on constate figure 4.14 que, pour $0 \leq \tau \leq 5T$, toutes les courbes sont raisonnablement parallèles à une droite de pente $\beta = 0, 11 \pm 0, 01$. Nous avons déterminé la valeur de cette pente pour différents coefficients de restitution. Ces valeurs sont comparées aux valeurs de $\overline{E_c}/N$ dans le TABLEAU V, avec N le nombre de disques et $\overline{E_c}$ l'énergie cinétique. On y voit que $\beta \overline{E_c}/N$ tend vers 1, quand $r \rightarrow 1$, c'est à dire la valeur pour un gaz

5. Sans gravité plus de la moitié des mesures correspondent à ces événements de puissance injectée nulle.

6. Cela tient au fait que deux mesures successives de P_{inj} sont décorréelées. En effet, puisqu'on a $\epsilon_{2T} \approx (P_{inj}(t) + P_{inj}(t+T))/2$ avec $P_{inj}(t)$ et $P_{inj}(t+T)$ décorréelée, donc on a, pour la loi de probabilité de ϵ_{2T} , le produit de convolution:

$$\Pi_2(\epsilon_{2T}) = \int \pi(P_{inj}) \pi(2\epsilon_{2T} - P_{inj}) dP_{inj}.$$

Et de même $\Pi_n(n\epsilon_{nT}) = \pi(P_{inj})^{\otimes n}$. La loi E.C.M. exprimée sous sa forme: $\langle \exp(-\beta n T \epsilon_{nT}) \rangle_{\Pi_n} = 1$ est aussi vérifiée pour la loi de probabilité $\pi(P_{inj})$ puisque $\langle \exp(-\beta n T \epsilon_{nT}) \rangle_{\Pi_n} = (\langle \exp(-\beta T P_{inj}) \rangle_\pi)^n = 1$ d'après les propriétés du produit de convolution.

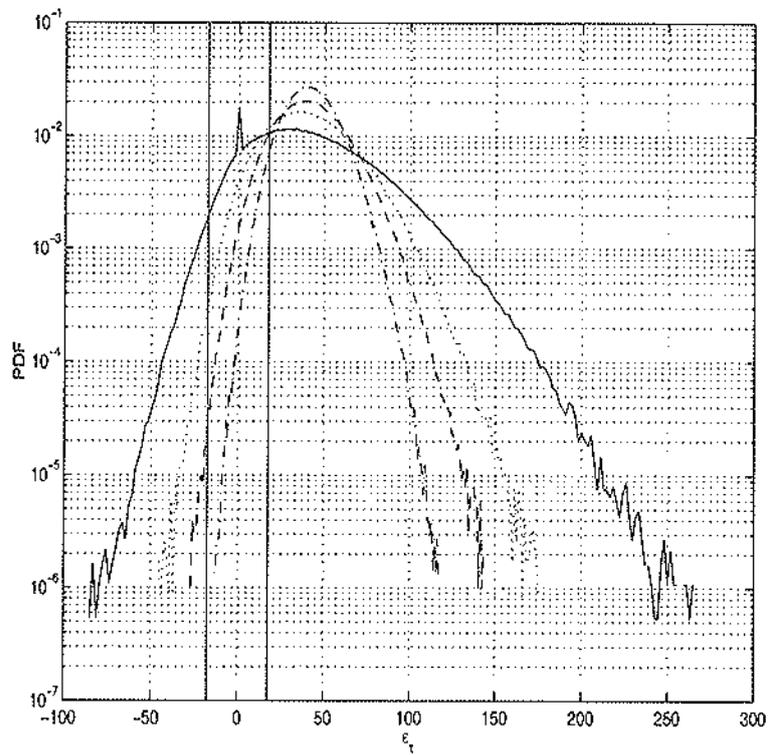


FIG. 4.13 -- PDF de la puissance injectée (—) et de ϵ_t pour $\tau = 2T$ (\dots), $3T$ (---) et $5T$ (-.-), pour 100 disques confinés, vibrés parallèlement à la gravité ($g=0,2$). T est la période d'oscillation de la paroi vibrante. On notera la présence d'un pic en 0 sur la puissance injectée.

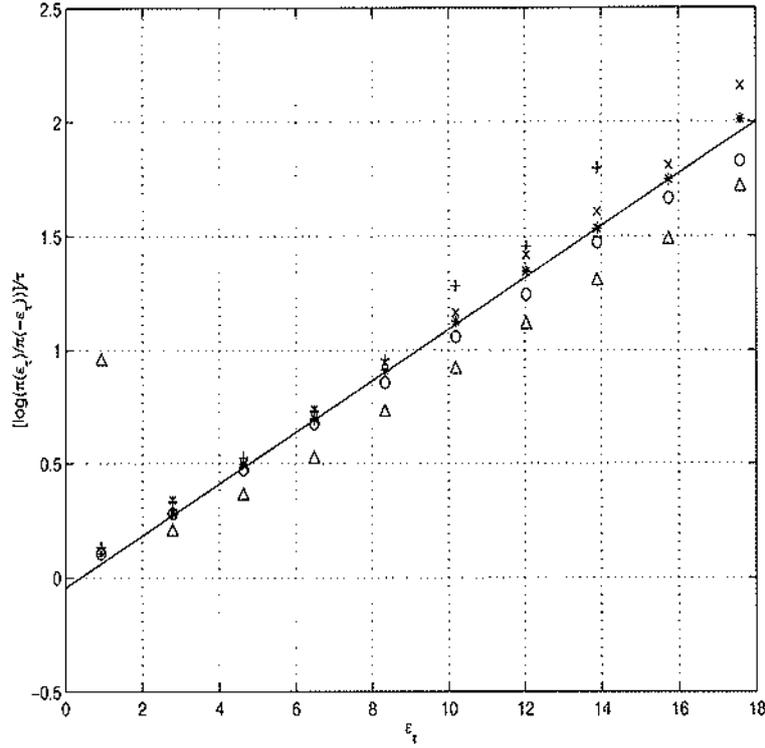


FIG. 4.14 – Test du théorème de fluctuation de GALLAVOTTI-COHEN dans un milieu granulaire dissipatif 2D ($N = 100$, $g = 0,2$ et $r = 0,95$). On peut observer des fluctuations négatives en nombre suffisant pour $\tau = 0$ (Δ), $\tau = 2T$ (\circ), $\tau = 3T$ (*), $\tau = 4T$ (\times) et $\tau = 5T$ (+).

2D non dissipatif à l'équilibre (pour lequel $r = 1$). Ce résultat n'est pas trivial puisque le milieu granulaire est toujours excité à la même amplitude et à la même fréquence, i.e le milieu est de plus en plus hors-équilibre. D'ailleurs, les fluctuations relatives de la puissance injectée sont de plus en plus importante quand $r \rightarrow 1$. Notons enfin que la loi E.C.M. permet de définir une *température granulaire*, $1/\beta$, différente de celle généralement introduite, $\sqrt{E_c/N}$.

r	0,9	0,95	0,99
$\sigma(P_{inj})/P_{inj}$	0,81	0,86	1,04
$\sigma(P_{diss})/P_{diss}$	0,30	0,25	0,20
$\sigma(E_c)/E_c$	0,11	0,10	0,10
$\beta E_c/N$	0,87	0,95	0,98

TABLEAU V : Fluctuations relatives de la puissance injectée, P_{inj} , dissipée, P_{diss} , et de l'énergie cinétique, E_c pour un milieu granulaire 2D de $N = 100$ disques vibrés de façon identiques et dont on fait varier le coefficient de restitution, r . La dernière ligne compare le coefficient $1/\beta$ de la loi E.C.M. à la valeur de E_c/N . Ce rapport vaut 1 pour un gaz non dissipatif à l'équilibre.

4.2.3 Le modèle en couches GOY.

Présentation du modèle.

Les modèles en couches sont des systèmes dynamiques formés d'équations différentielles ordinaires non-linéaires. Dans une certaine mesure, ils modélisent la dynamique des équations de NAVIER ET STOKES dans l'espace des vecteurs d'onde en ne considérant que les interactions entre plus proches voisins dans cet espace [6]. Parmi les différentes versions de modèle en couches existant, nous avons étudié celui de GLEDZER-OHKITNI-YAMADA (GOY), dont le caractère chaotique et intermittent a été mis en évidence dans une certaine gamme de paramètres [7]. Le système d'équations correspondant à ce modèle est :

$$\dot{u}_m = i(ak_n u_{m+1} u_{m+2} + bk_{m-1} u_{m-1} u_{m+1} + ck_{m-2} u_{m-1} u_{m-2})^* - \nu k_m^2 u_m + F_m. \quad (4.11)$$

u_m est à rapprocher de l'amplitude complexe du mode de vitesse de nombre d'onde k_m discrétisé tel que $k_m = k_o 2^m$, avec $m \in [1, N_c]$ qui indice les N_c couches. F_m est le forçage de la couche m . Dans notre cas on ne forcera que la quatrième couche avec un forçage $F_m = 5.10^{-3}(1+i)\delta_{4,m}$. Dans un premier temps les autres paramètres ajustables ont été choisis de manière à retrouver les lois d'échelles de la turbulence pour les moments de u_m . Leur valeur est reportée dans le TABLEAU VI.

N_c	ν	k_o	a	b	c
22	10^{-7}	$6.25.10^{-2}$	1	-0.5	-0.5

TABLEAU VI Paramètres ajustables du modèle en couches GOY

Le programme qui nous a permis de résoudre (4.11) à été réalisé par Pietri Poggi. Pour connaître les multiples propriétés d'intermittence et le comportement en loi de puissance dans ce modèle on se reportera aux références [6, 7]

Il est toutefois bon de savoir que les équations du modèle en couche se prêtent bien à des transformations permettant d'en dériver un système d'équations conformes aux hypothèses du théorème de GALLAVOTTI-COHEN [1, 8]. Dans cette dernière référence notamment, on compare les propriétés d'intermittence de la version thermalisée réversible de (4.11) avec celles du modèle GOY non modifié. Nous nous proposons ici de suivre la démarche complémentaire, c'est à dire de vérifier si la puissance injectée dans le modèle en couche GOY, $P_{inj} = \mathcal{R}e(F_4 u_4)$, suit la relation (4.3) avec le coefficient $\beta = N_c / \sum_{m=1}^{N_c} |u_m|^2 / 2$ avec N_c le nombre de couches.

Test du théorème de GALLAVOTTI-COHEN dans le modèle en couches de GOY

Comme précédemment, on s'est intéressé à la variable ϵ_τ définie par (4.2). Ces PDF pour différentes valeurs de τ sont données figure 4.15. On notera que pour les paramètres choisis pour cette figure, pour lesquels le système est intermittent, la puissance injectée ne présente qu'une faible proportion d'événements négatifs (1,3%) et ϵ_τ est rapidement toujours positif. Il existe quand même

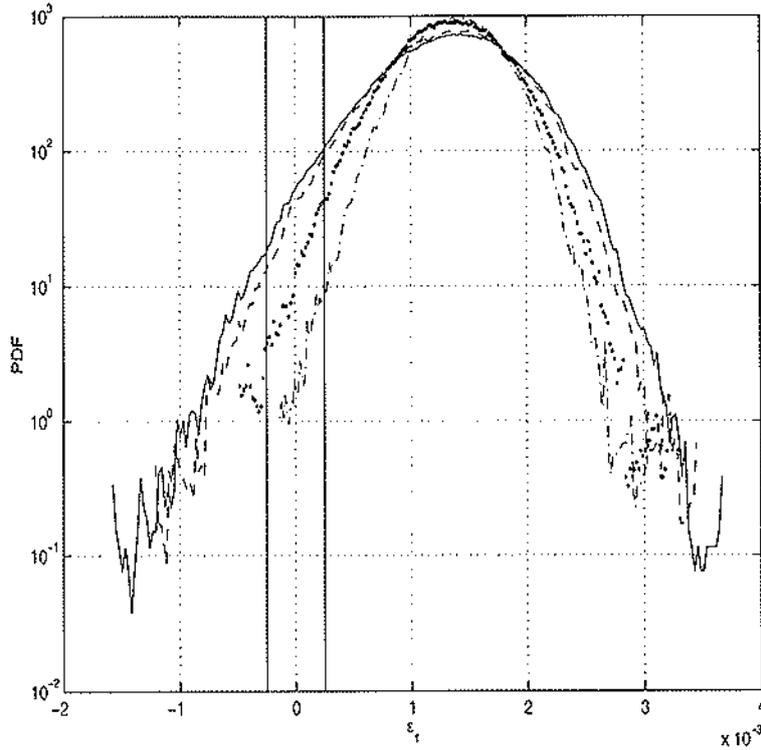


FIG. 4.15 – PDF de la puissance injectée (—) et de ϵ_r pour $\tau = T_c$ (---), $2,5T_c$ (····), $4T_c$ (-·-·-), pour un modèle GOY de 22 couches dans le régime intermittent.

des probabilités d'avoir ϵ_r négatif jusqu'à des $\tau = 4T_c$, avec T_c le temps d'autocorrélation de P_{inj} .

Cela nous permet de tracer figure 4.16 $\left[\log \left(\frac{\pi(\epsilon_r)}{\pi(-\epsilon_r)} \right) \right] / \tau$ en fonction de ϵ_r . L'alignement n'est pas aussi net que dans les cas précédents. On peut cependant déterminer une pente de $\beta = (700 \pm 100)$ commune aux courbes où τ est supérieur à deux. L'importance de l'erreur tient au fait que l'on considère ici des queues de distributions, c'est à dire des événements de très faible probabilité qu'il est très difficile d'estimer correctement. Il faudrait pour cela enregistrer un nombre énorme de points. Toutefois, même avec cette erreur importante, on trouve

$$\beta \sum_{m=1}^{22} \overline{|u_m|^2/2} = (2,3 \pm 0,3) N_c$$

pour $N_c = 22$. Lorsqu'on fait varier le nombre de couches et la viscosité de manière à garder constant le flux d'énergie dissipée dans la dernière couche $\xi_d = \nu^3 \cdot k_{N_c}^4$, obtient :

N_c	18	22	26
$\beta E_c / N_c$	$3,5 \pm 1$	$2,3 \pm 0,3$	4 ± 1

TABEAU VII : Variation de la variable sans dimension $\beta E_c / N_c$ en fonction du nombre de couches N_c inclu dans le modèle GOY. On a $E_c = \sum_{m=1}^{N_c} \overline{|u_m|^2/2}$.

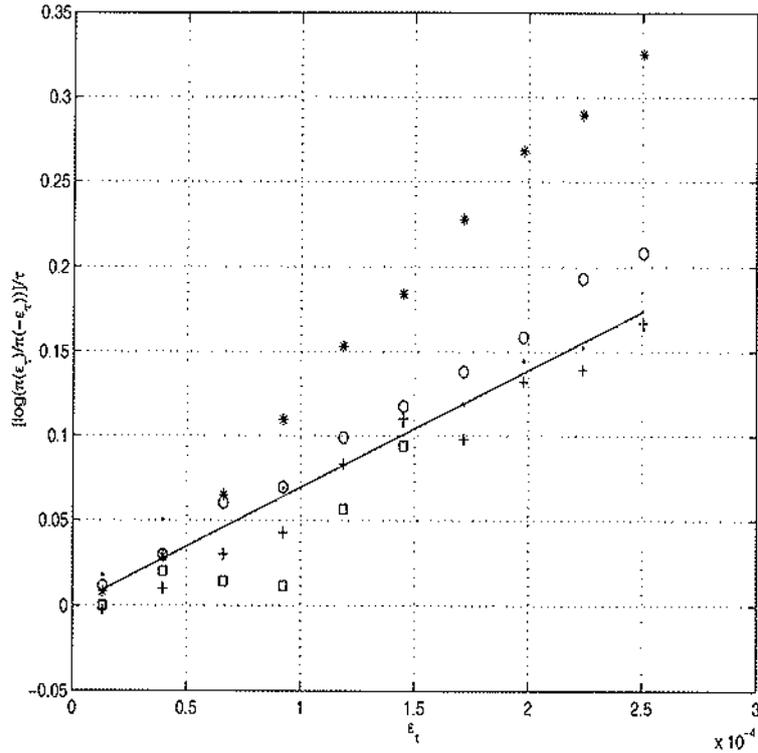


FIG. 4.16 – Vérification du théorème de fluctuation de GALLAVOTTI–COHEN dans le modèle en couches GOY. On peut estimer des probabilités de fluctuations négatives pour $\tau = 1T_c$ (*), $\tau = 2T_c$ (o), $\tau = 2,5T_c$ (·), $\tau = 3T_c$ (+) et $\tau = 4T_c$ (□) avec $T_c = 6$ s le temps d'autocorrélation du signal de puissance injectée.

Notons que, les vitesses u_m étant scalaire, on se serait attendu plutôt à des valeurs inférieures à $1/2$, du fait de la “contraction” de l'espace des phases.

4.3 Test du théorème de GALLAVOTTI–COHEN sur les mesures expérimentales de puissance.

S'il existe un désaccord fondamental entre les prévisions du théorème de GALLAVOTTI–COHEN et les fluctuations de puissance injectée dans un système réel, on peut espérer que nos mesures expérimentales nous permettront de le mettre en évidence.

4.3.1 Cas de l'écoulement de VON KÁRMÁN.

Rappel sur le principe de la mesure.

On a montré au chapitre II, comment, à partir de capteurs de pression placés sur une pale d'un des deux disques en rotation, on a estimé la force de trainée sur cette pale. Comme on connaît la vitesse de rotation des disques, on peut en déduire la puissance injectée par une pale. Or la puissance est essentiellement injectée grâce aux pales. Néanmoins, comme on l'a vu, les fluctuations de pression sur chaque pale ne sont pas indépendantes. De plus, les deux disques en contre-rotation sont eux aussi corrélés. Toutefois, en première approximation, on peut supposer que les fluctuations de puissance mesurées dans notre expérience, lorsqu'on les lissent sur des intervalles, τ , de plus en plus longs, convergent vers leur valeur moyenne d'une façon similaire à la puissance injectée.

Une autre difficulté vient du fait que nous ne connaissons pas la valeur moyenne de la puissance injectée car nos mesures de pression sont dynamiques. Pour pouvoir étudier la convergence des événements rares sous une forme analogue à (4.3), il va falloir translater arbitrairement le signal de sorte que la gamme de probabilité que l'on veut étudier se trouve autour de 0. Ainsi, si on veut savoir si les probabilités autour de l'écart type de P_{inj} décroissent suivant un rapport analogue à (4.3), alors il faut décaler de l'écart-type le signal initialement centré en 0. Puis on calcule un $\epsilon_\tau(t)$ suivant (4.2). On peut ainsi tester si le signal mesuré suit une loi des larges déviations sous la forme (4.3).

Loi des larges déviations pour la puissance injectée dans l'écoulement de VON KÁRMÁN.

Sur la figure 4.17, on a tracé

$$\frac{1}{\tau} \log \left[\frac{\pi(\epsilon_\tau)}{\pi(-\epsilon_\tau)} \right]$$

pour des signaux de puissance décalés de l'écart type et du tiers de l'écart type. Dans les deux cas on converge vers une droite unique. Cependant, plus on regarde la convergence en un point près de la valeur moyenne, plus il faut attendre longtemps pour que l'on puisse vérifier une relation du type de celle du théorème de fluctuation de GALLAVOTTI-COHEN. Cette relation (4.3) est vraie dès que $\tau_o = 2,33 T_c$ pour les valeurs autour de l'écart type alors qu'il faut attendre $\tau_o = 6,67 T_c$ quand on considère les valeurs au voisinage du tiers de l'écart type soit à peu près 3 fois plus. On remarquera ainsi que c'est bien une loi de larges déviations que l'on vérifie, car pour un bruit blanc gaussien la relation (4.3) est vraie pour tout τ . Enfin la pente β de la droite vers laquelle converge les courbes de la figure 4.17 vaut $\beta_o/T_c = 13.10^{-6}$ pour les probabilités autour de l'écart type et $\beta_o/3/T_c = 5.10^{-6}$ pour les probabilités autour du tiers de l'écart type. Là aussi, il apparaît un facteur trois, mais il faudrait pouvoir extraire de manière objective le premier temps τ_o , pour lequel (4.3) est vérifié, avant de pouvoir conclure que, quelque soit le point x_o de la PDF des fluctuations où l'on étudie la convergence vers la moyenne, on a $\beta(x_o)\tau_o(x_o)$ constant.

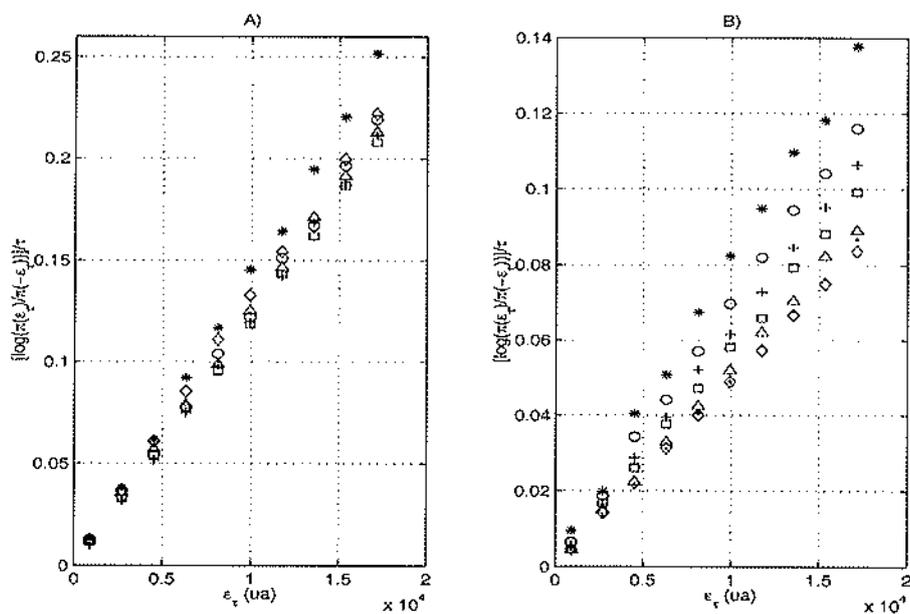


FIG. 4.17 – Convergence vers la loi des larges déviations d'un signal expérimental de la puissance injectée dans l'écoulement de VON KÁRMÁN turbulent ($Re = 5,4 \cdot 10^6$). La figure A) considère la convergence des événements rares autour de l'écart type de P_{inj} alors que B) considère les événements autour du tiers de l'écart type. Les symboles correspondent à: $\tau = 1,667T_c$ (*), $2,333T_c$ (o), $3T_c$ (+), $3,667T_c$ (\square), $4T_c$ (\triangle), $6,667T_c$ (\diamond), $8,333T_c$ (\bullet)

4.3.2 Cas de la convection de RAYLEIGH-BÉNARD.

On a vu en introduction que la puissance injectée pour la mise en mouvement du fluide en convection de RAYLEIGH-BÉNARD était pratiquement proportionnelle au flux thermique traversant la cellule. On a également mis en évidence au chapitre précédent que le flux de chaleur était toujours positif. Cependant, pour pouvoir tester la loi E.C.M. sans translater de manière trop arbitraire le signal de flux autour de 0, on peut retrancher d'une façon systématique au flux réel, le flux thermique conductif à travers les couches limites thermiques que l'on définit comme étant l'épaisseur e_c pour laquelle une différence de température de $\Delta T/2$ correspond à la limite de stabilité marginale. On soustrait donc au flux mesuré, la quantité :

$$Q_{e_c} = \frac{\lambda \Delta T}{2e_c}$$

avec

$$e_c = \left[\frac{Ra_c}{Ra} \right]^{1/3} d$$

où Ra_c est le nombre de RAYLEIGH critique de l'instabilité convective, pour une couche mince de fluide, avec des conditions de bord pour la vitesse rigide en bas et libre en haut⁷. On a alors pour quelques valeurs du nombre de RAYLEIGH un flux thermique qui peut présenter (cf figure 4.18) un nombre non négligeable d'événements négatifs sur lesquels on va pouvoir tester la relation (4.3).

Pour les nombres de RAYLEIGH où une relation du type (4.3) :

$$\log \left(\frac{\pi(\epsilon_\tau)}{\pi(-\epsilon_\tau)} \right) \Big|_{\tau > \tau_c} = \beta \epsilon_\tau \tau$$

a pu être mise en évidence, on a déterminé β en fonction de Ra . Le TABLEAU VIII donne la valeur de β pour différents nombres de RAYLEIGH où le calcul a été possible dans les cellule I et II. Dans la cellule I, ce sont les plus grands nombres de RAYLEIGH accessibles. La décroissance de β y semble rapide (en puissance -2). Au plus petites valeurs de Ra , il n'existe pas ou pas assez de valeurs négatives du flux pour que l'on puisse estimer $\pi(-\epsilon_\tau)$. Dans la seconde cellule, on peut également calculer un β en fonction de Ra pour certaines valeurs du nombre de RAYLEIGH, mais les valeurs obtenues ne se superposent pas avec celles de la cellule I (cf TABLEAU VIII). Ceci peut s'expliquer par le rapport d'aspect, la nature différente du chauffage (à température constante dans la cellule II et à puissance constante dans la cellule I), et la différence d'inertie thermique entre les plaques, qui engendrent des temps caractéristiques différents pour les fluctuations du flux mesurées dans les cellules I et II. D'ailleurs, cela se voit sur le saut du temps d'autocorrélation du flux thermique entre les cellules I et II. On remarquera que l'épaisseur de la couche limite et le flux thermique sont du même ordre dans les deux cellules car ils dépendent essentiellement de la différence de température entre les plaques. Enfin, notons qu'une erreur de quelques pour-cents sur les flux mesurés Q_m ou sur Q_{e_c} suffit à expliquer les fluctuations de 20% observables sur la différence $Q_m - Q_{e_c}$. De plus, le domaine des nombres de RAYLEIGH accessibles dans chaque cellule prise

7. Les conditions de bord à prendre sur la température sont moins claires, mais typiquement on aura un nombre de RAYLEIGH de quelques milliers. Pour nos calculs, on a pris $Ra_c = 2000$. La puissance 1/3 qui intervient dans le calcul de e_c rend cette dernière peut sensible à une erreur sur Ra_c .

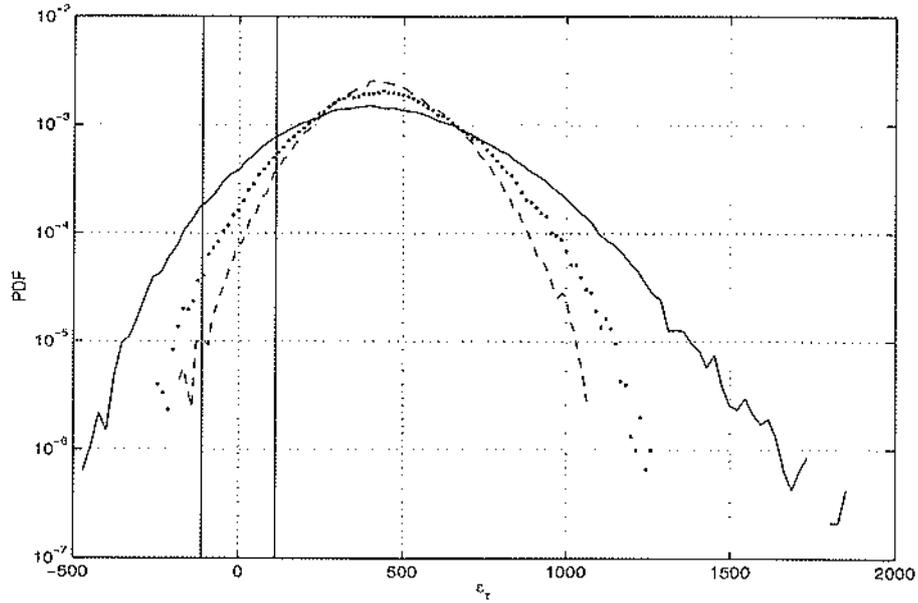


FIG. 4.18 – Fonctions de densité de probabilité des fluctuations de flux thermique dans la cellule I à un nombre de RAYLEIGH de $7,4 \cdot 10^7$ décalée de Q_{e_c} (—) et des variables ϵ_T que l'on obtient en lissant ce flux sur des temps correspondant respectivement à 3 (···) et 5 (---) fois le temps d'autocorrélation.

séparément est petit. Toutes ces raisons, font qu'il est difficile de tirer des conclusions quantitatives quant au comportement général due β avec Ra

	Cellule I					Cellule II		
Ra	$4,8 \cdot 10^7$	$6,6 \cdot 10^7$	$7,4 \cdot 10^7$	$8,3 \cdot 10^7$	$9,3 \cdot 10^7$	$2,3 \cdot 10^9$	$2,6 \cdot 10^9$	$3,3 \cdot 10^9$
Q_m (W/m^2)	2511,4	3517,7	4065,1	4647,5	5287,7	2789,3	3246,5	4450,0
e_c (mm)	2,1	1,9	1,8	1,7	1,7	1,9	1,8	1,7
$Q_m - Q_{e_c}$	431,5	414,6	442,0	383,1	338,5	348,3	395,6	303,1
$\beta \cdot 10^{-3}$ (m^2/J)	4,6	3,5	2,8	1,5	1,2	7,3	7,1	1,0
T_c (s)	3,4	2,9	2,6	2,6	2,3	9,6	9,1	8,6

TABLEAU VIII: Valeurs pour quelques nombres de RAYLEIGH, du flux thermique moyen mesuré Q_m , de l'épaisseur de la couche limite e_c , du flux thermique moyen translaté de la valeur du flux thermique conductif à travers les couches limites $Q_m - Q_{e_c}$ et de la valeur de β que l'on peut déduire de ce flux ainsi translaté. La dernière ligne donne pour information le temps d'autocorrélation des fluctuations de flux thermique.

4.4 Conclusions

Le traitement que nous avons effectué sur les signaux de puissance injectée, dans des systèmes dissipatifs aussi divers que des modèles numériques de chaîne de patins, de milieux granulaires, ou bien dans des dispositifs expérimentaux d'écoulements turbulents, soulève deux types de questions.

– Pourquoi des relations de types (4.3) sont-elles si couramment vérifiées ?

En fait, comme le note Gallavotti [9], la loi E.C.M sous sa forme (4.3) :

$$\log \left(\frac{\pi(\epsilon_\tau)}{\pi(-\epsilon_\tau)} \right) \Big|_{\tau \gg t_c} = \beta \epsilon_\tau \tau,$$

avec

$$\epsilon_\tau(t) = \int_t^{t+\tau} P_{inj}(t') dt',$$

est une loi de larges déviations. Or, comme on l'a vu en introduction, tout signal aléatoire $X(t)$, de moyenne non nulle, avec un certain temps de corrélation t_c et avec une probabilité d'événements négatifs non nulle, permet de construire une variable aléatoire $\xi_\tau(t)$, définie comme l'est $\epsilon_\tau(t)$ à partir de $P_{inj}(t)$, et qui vérifiera une loi semblable à (4.3), sur un certain domaine autour de 0 au moins. A titre d'exemple, la figure 4.19 montre les PDF de $\xi_\tau(t)$ et la superposition de $\log \left(\frac{\pi(\xi_\tau)}{\pi(-\xi_\tau)} \right)$ pour un signal aléatoire $X(t)$ tiré de façon équiprobable entre $-1/4$ et $3/4$ ⁸. Nécessairement, tous nos signaux expérimentaux vérifieront également la loi très générale des larges déviations. C'est également ce qui est observé sur des mesures locales de température en convection turbulente [10]. Mais on ne peut espérer tester le théorème de GALLAVOTTI-COHEN à partir de mesures locales, ni même à partir de mesures intégrées sur une partie du système [11], on arrive naturellement à une autre question :

– Quelles informations peut-on tirer de ce type d'analyse ?

Car si la loi E.C.M s'interprète bien comme une loi de larges déviations, elle va aussi plus loin. Ainsi il n'existe pas de restrictions sur ϵ_τ pour que (4.3) soit valable. Toutefois, expérimentalement, on est limité par l'existence de valeurs $\epsilon_\tau(t)$ négatives. Sachant que, plus on sonde loin dans les queues de distributions, plus l'erreur commise sur la probabilité devient grande, on est souvent limité à des vérifications de (4.3) pour des valeurs de ϵ_τ proches de 0.

Mais surtout, d'après l'ergodicité supposée des systèmes dissipatifs stationnaires étudiés, la loi E.C.M donne des informations sur l'espace des phases \mathcal{E} de ces systèmes dynamiques. $\beta \epsilon_\tau$ est équivalent au taux de contraction pendant un temps τ dans l'espace des phases et $\pi(\epsilon_\tau)$ est aussi la proportion de trajectoires de \mathcal{E} correspondant à des évolutions dynamiques du système qui une fois moyennées sur un temps τ donneront une puissance injectée égale ϵ_τ , qui peut être négative. Et d'après les exemples de [1, 8], $\beta \overline{E}$, avec $\frac{dE}{dt} = P_{inj} - P_{diss}$ ⁹, représente le nombre de degrés de liberté du système, c'est-à-dire la dimension de l'espace de phase \mathcal{E} . Si ce résultat, reste vrai pour les différents modèles numériques de systèmes dissipatifs que

8. La figure 4.19 est obtenue à partir de 500 000 tirages de la fonction *rand* du logiciel MATLAB.

9. Avec des systèmes stationnaires définis tel que $\frac{dE}{dt} = 0$ dans [1, 8], on a E constante et donc égal à \overline{E}

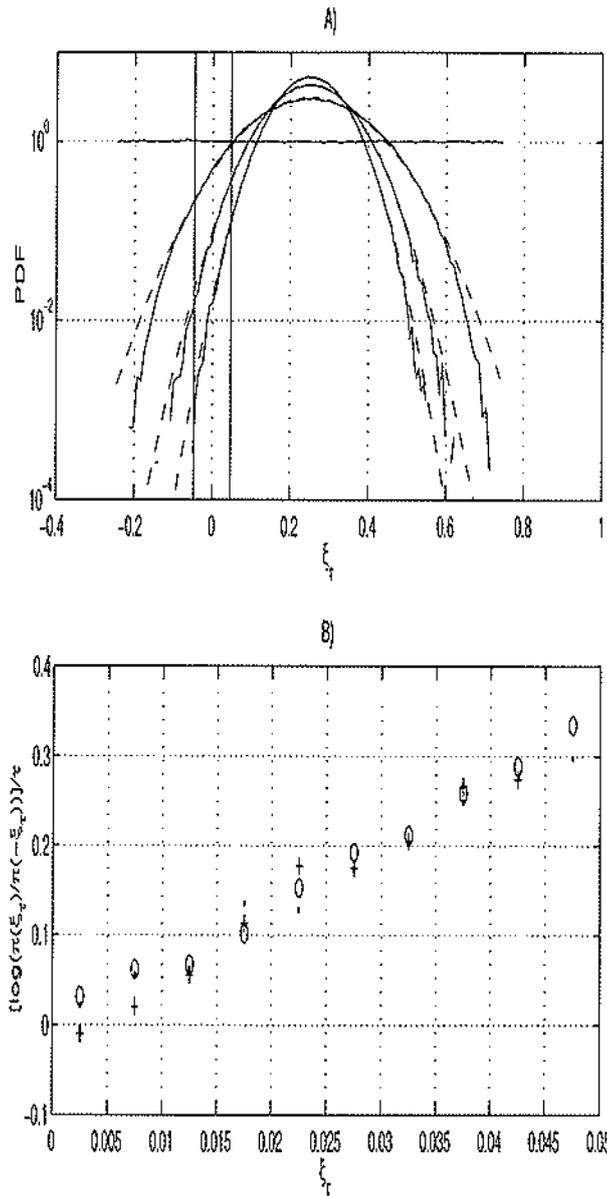


FIG. 4.19 - A) représente les fonctions de densité de probabilité de $X(t)$, bruit blanc dont l'amplitude est tirée de manière équiprobable entre $-1/4$ et $3/4$, et de ξ_τ pour $\tau = 5, 10, 15$ avec en tirets les gaussiennes de même écart type. Les traits verticaux délimitent la zone où a été estimée la fonction $\frac{1}{\tau} \log \left(\frac{\pi(\xi_\tau)}{\pi(-\xi_\tau)} \right)$ tracée en B) avec les symboles: ($\bullet \bullet \bullet$) pour $\tau = 5$, ($\circ \circ \circ$) pour $\tau = 10$ et ($+++$) pour $\tau = 15$.

nous avons considérés, on trouve alors pour chacun d'eux le nombre de degrés de liberté par *particule*¹⁰ reporté dans le TABLEAU IX ci-dessous.

Système :	patins	grains	GOY
$\beta \bar{E} / \mathcal{N}$	$\approx 3 / \mathcal{N}$	< 1 (et tend vers 1 avec r)	2-4
avec \mathcal{N}	le nombre de patins	le nombre de grains (> 1)	le nombre de couches

TABLEAU IX : Récapitulatifs des valeurs obtenues pour le produit de β et de l'énergie par particule. Pour un système de dimension D à l'équilibre thermodynamique se produit vaut $D/2$.

10. On entend par *particule* le nombre de patins, de grains ou de couches dans nos modèles numériques.

Bibliographie

- [1] G. Gallavotti et E.G.D. Cohen 1995, *J. Stat. Phys.*, vol 80 n 5/6 p 931.
- [2] R. Burridge et L. Knopoff 1967, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, vol 57 p341
- [3] M. de Sousa Vieira 1992, *Phys. Rev. A*, vol 46 n 10 p 6288.
- [4] P.J.Holmes 1982, *J. sound Vib.*, vol 84, p 173.
- [5] S. Mc Namara, J.-L. Barrat 1996, *Phys. Rev. E*, vol 55 n 6 p 7767.
- [6] U. Frisch 1995, 'Turbulence', Cambridge University press.
- [7] K. Ohkitani and M. Yamada 1989, *Progr. Theoret. Phys.* vol 89 p.
- [8] L. Biferale, D. Pierotti and A. Vulpiani 1998, *Journal of physic a*, vol 31, p 21.
- [9] G. Gallavotti 1998, *Chaos*, vol 8, n 2, p 384.
- [10] S. Ciliberto and C. Laroche 1998, *J. Phys.IV France*, vol 8 p 215.
- [11] G. Gallavotti 1997, *Physica D* ,vol 105 n1/3 p 163 (à vérifier).

Chapitre 5

Conclusions.

Les études que nous avons menées dans l'écoulement de VON KÁRMÁN turbulent nous ont permis de mettre en évidence une interdépendance à grande distance dans les processus d'injection de l'énergie, i.e au niveau des forces de trainée localisées en un point de la pale. Nous avons ensuite montré par quels biais ces corrélations pouvaient influencer la forme des fluctuations de la puissance totale injectée dans l'écoulement. Il est alors apparu clairement que des modifications dans la manière d'injecter l'énergie, comme le fait d'augmenter le nombre de pale sur l'un des deux disques en contra-rotation, pouvait transformer l'écoulement de façon telle que cela change la nature des corrélations spatiales entre les fluctuations locales de trainée, ce qui modifie la forme des fluctuations de la puissance injectée par une pale. Par contre, faute d'avoir un nombre suffisant de capteurs pour pouvoir intégrer spatialement la mesure, nous n'avons pas pu tirer de conclusion sur la modification de la puissance totale injectée.

En convection de RAYLEIGH-BÉNARD, grâce à l'utilisation de deux cellules de tailles différentes, on a pu étudier, sur presque trois décades en nombre de RAYLEIGH les fluctuations relatives du flux thermique qui est proportionnel à la puissance injectée, au flux conductif près. On a ainsi montré que l'écart type du flux thermique croît linéairement avec la différence de température imposée aux bords. Dans la plus petite des deux cellules, on a mis en évidence la présence de corrélations sur des distances de l'ordre de la taille de la cellule. On a vu que l'on pouvait expliquer ces corrélations par la présence d'un écoulement moyen. Par contre, rien de tel n'a pu être détecté dans la grande cellule.

Cette interdépendance sur de grandes distances ruine les arguments permettant d'invoquer le théorème central limite pour les fluctuations de la grandeur globale qu'est la puissance injectée. Cependant, c'est une grandeur globale particulière, car en général, comme on peut le voir dans nos modèles de chaîne de patins et de milieu granulaire 2D ou dans nos écoulements expérimentaux, l'injection d'énergie est un phénomène de surface où intervient des problèmes de stabilité de couches limites. La dissipation quant à elle, a bien lieu dans le volume. De plus il semble naturel d'attribuer à la puissance dissipée une longueur de corrélation proportionnelle à la longueur de dissipation l_d , si celle-ci à un sens. On peut donc s'interroger sur la possibilité de décrire les fluctuations

de puissance dissipée avec le théorème central limite. Et quelles sont alors les corrélations entre puissance injectée, dissipée et énergie cinétique et leur degré d'universalité puisque la somme de ces deux premières quantités est toujours égale à la dérivée temporelle de la troisième¹ ?

Expérimentalement il n'est pas facile d'envisager une mesure de la puissance dissipée pour nous aider à répondre à ces questions. Numériquement par contre, on a accès à toutes ces quantités, mais on est loin de la limite $Re \rightarrow \infty$. Cependant, pour conclure, on peut citer les résultats des simulations d'un écoulement sous étirement constant d'Alain Pumir [1] et les comparer à ceux du modèle en couches GOY. La figure 5.1A) montre la trace temporelle de la puissance injectée, l'énergie cinétique et la puissance dissipée dans cet écoulement, centrées et normées par leur écart type. A de petites fluctuations près ces trois courbes sont les mêmes. Elles sont juste translatées dans le temps. Cela se retrouve sur les fonctions de corrélation croisée entre énergie cinétique totale, puissance injectée et dissipée dont les maxima valent 0,95 et 0,97 (figure 5.1B)! On voudrait alors pouvoir capter la dynamique des grandeurs globales avec une simple équation à deux temps de retard.

$$\frac{dE_c(t)}{dt} = A(E_c(t + \tau_1) - E_c(t - \tau_2)),$$

où $P_{inj} = AE_c(t + \tau_1)$ et $P_{diss} = AE_c(t - \tau_2)$ et A^{-1} un temps tel que $\overline{P_{inj}} = \overline{P_{diss}} = A\overline{E_c}$. Toutefois, pour le modèle en couche GOY, si on a toujours avec une bonne approximation (figure 5.1 a) et b)) $P_{inj} \approx AE_c(t + \tau_1)$, les fluctuations de puissance dissipée, sont quant à elles, d'une nature tout à fait différente. Notons enfin que dans ces deux exemples, les fluctuations ne sont gaussiennes pour aucune des grandeurs globales considérées.

1. Pour ne parler que des grandeurs globales car on pourrait également soulever les problèmes que cela peut poser pour : la dynamique du flux d'énergie à travers les échelles, l'influence des fluctuations de puissance sur la dynamique des petits échelles et réciproquement ...

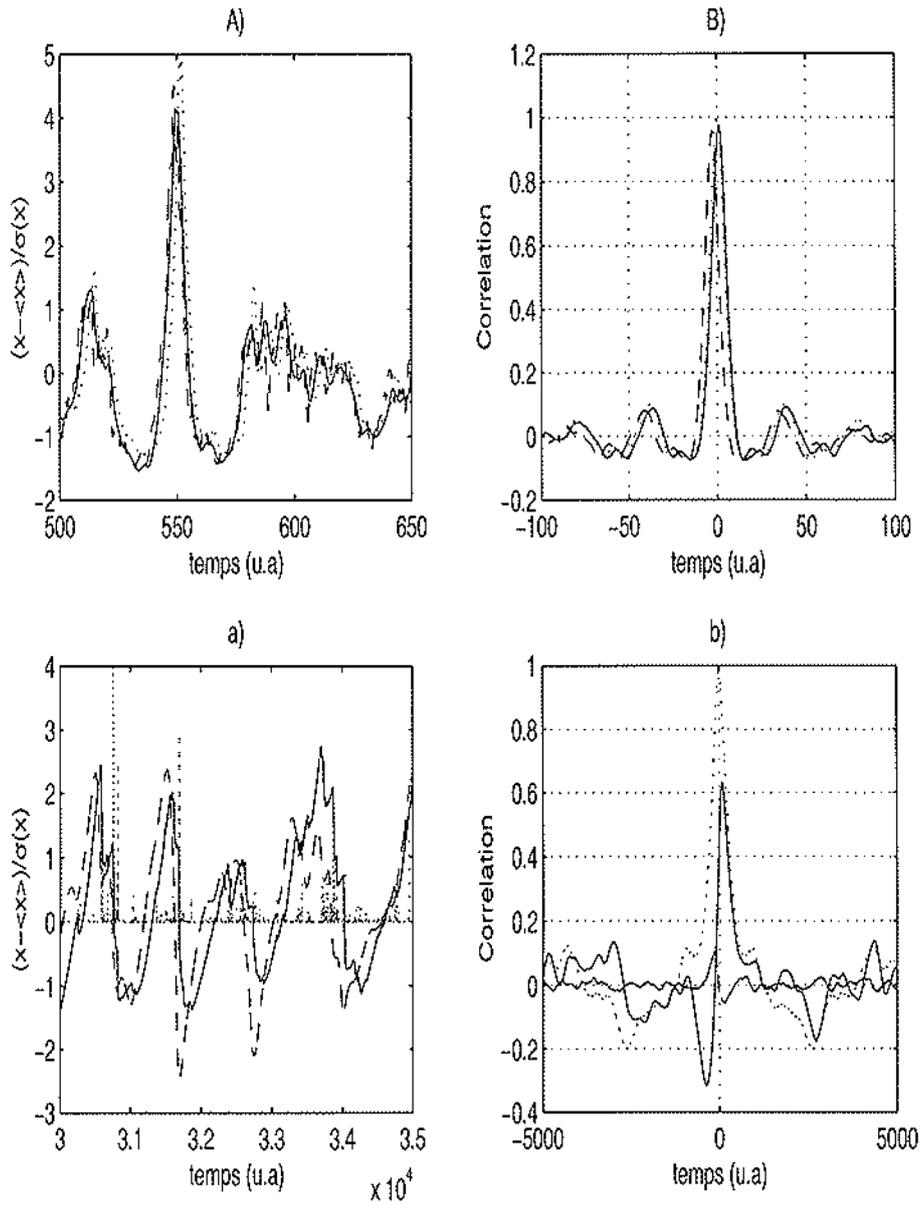


FIG. 5.1 – La figure A) représente les traces temporelles de l'énergie cinétique E_c (—), la puissance injectée P_{inj} (---) et dissipée P_{diss} (···), centrées et normalisées par leur écart type, dans la simulation d'un écoulement turbulent à cisaillement constant pour un nombre de REYNOLDS de 2632 [1]. La figure B) donne la fonction d'autocorrélation (···) de E_c , les fonctions de corrélation croisée $P_{inj} \times E_c$ (---) et $P_{diss} \times P_{inj}$ (-·-·). Les courbes a) et b) représentent les mêmes quantités pour le modèle en couche GOY avec 26 couches, à l'exception de la puissance dissipée figure a) (···) qui, pour plus de clarté, n'a pas été centrée et est représentée divisée par 10 fois son écart type.

Bibliographie

- [1] A. Pumir 1996, *Phys. Fluids*, vol 8 n 11 p 3112.

Annexes

Annexe A

Influence du transfert radiatif sur la convection à flux fixé.

Le travail présenté ci-après a été initié au cours de l'école de l'été 1996 de "Geophysical Fluids Dynamics au WOODS HOLE OCEANOGRAPHIC INSTITUTION" en collaboration avec N. J. Balmforth. Il a fait l'objet d'un compte-rendu dans le GDF proceeding on "Double-diffusive processes" (1996).

A.1 Introduction

En plus de la conduction et de la convection, le transport de la chaleur peut également s'effectuer par l'intermédiaire du rayonnement. Le transfert radiatif entre en jeu dans les atmosphères planétaires et stellaires. Pour évaluer le rôle des radiations dans la dynamique d'un fluide en convection, on peut considérer un gaz placé dans une cellule de RAYLEIGH-BÉNARD, dont le rapport d'aspect est infini, et où la température des parois horizontales est telle que leur rayonnement de corps noir puisse interagir avec les atomes du gaz (cf figure A.1).

Goody [1], en 1956, fut le premier à démontrer l'effet du rayonnement sur le seuil d'instabilité convective lorsque la température des parois horizontales reste fixe. Dix années plus tard, il obtiendra en collaboration avec Gille une confirmation expérimentale de ses prévisions théoriques [2]. Dans cette annexe, nous nous proposons d'effectuer une étude similaire dans un cas où le flux total de chaleur est imposé à la paroi. Une des motivations pour cette étude tient au fait que la présence de radiations dans ce système, brise l'invariance par translation de l'origine des températures, qui fixe la longueur d'onde de l'instabilité au seuil d'instabilité, dans le cas non radiatif à flux constant. Il est donc intéressant d'établir la courbe de stabilité marginale en présence de radiation car rien ne permet plus de prévoir la valeur du premier mode instable.

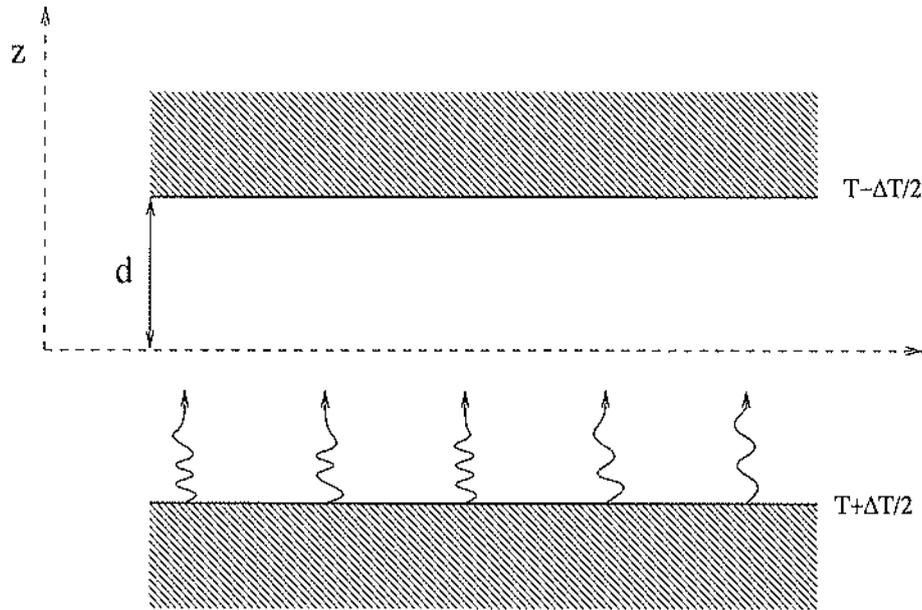


FIG. A.1 – Géométrie d'un système convectif où le gaz en convection absorbe les radiations thermiques émises par les parois.

Pour ce faire, il nous faudra d'abord établir les équations du mouvement fluide en présence de radiations en précisant les approximations qui seront faites ainsi que leur degré de validité. Dans la partie suivante, on considèrera les cas limites à partir des équations adimensionnées. Enfin, on donnera les courbes de stabilité marginale obtenues numériquement pour différents paramètres optiques du système. Dans les cas où un calcul analytique sera possible, nous pourrons le comparer avec les résultats obtenus numériquement.

A.2 Equations du mouvement convectif d'un fluide en présence de radiations.

A.2.1 Approximations sur le fluide.

A faibles gradients de température, il semble raisonnable de se placer dans le cadre de l'approximation de BOUSSINESQ. Dans ce cas la densité du fluide est considérée constante sauf dans le terme de poussée d'ARCHIMÈDE où $g\rho = g\rho_0(1 - \alpha(T - T_0))$. De plus, aux échelles de temps hydrodynamiques, on néglige la variation d'énergie interne due à l'absorption ou l'émission de photons (les deux phénomènes se compensant en moyenne sur ces échelles de temps), on a : $dU = \rho_0 C_v dT$. On prend le flux de chaleur, F , proportionnel au gradient de température $F_i = -k\partial_i T$, comme cela se fait habituellement. Aux vitesses hydrodynamiques, petites devant la vitesse de la lumière, comme c'est expliqué dans l'annexe B à partir d'un gaz de photons, et comme l'a posé Goody [1],

les radiations n'interviennent que sous forme d'un flux radiatif, \mathbf{F}^R , dans l'équation de la chaleur. On a donc le système

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{A.1a})$$

$$\rho_0 D_t \mathbf{v} = -\nabla(p + \rho_0 g z) + \rho_0 g \alpha \Delta T \mathbf{e}_z + \eta \nabla^2 \mathbf{v} \quad (\text{A.1b})$$

$$\rho_0 C_v D_t \Delta T = k \nabla^2 \Delta T - \nabla \cdot \mathbf{F}^R \quad (\text{A.1c})$$

avec $D_t = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$.

A.2.2 Approximations sur le rayonnement.

L'intensité lumineuse I (directement proportionnelle à la densité de photons) est correctement décrite par l'équation de SCHWARZCHILD

$$1/c \partial_t I(t, \nu, \mathbf{x}, \mathbf{e}) + e_i \partial_i I(t, \nu, \mathbf{x}, \mathbf{e}) = \kappa_{opt} \rho (B(t, \nu, \mathbf{x}) - I(t, \nu, \mathbf{x}, \mathbf{e})), \quad (\text{A.2})$$

$I(t, \nu, \mathbf{x}, \mathbf{e})$ étant l'intensité en \mathbf{x} à l'instant t de fréquence ν dans la direction \mathbf{e} , $B(t, \nu, \mathbf{x})$ donnant la variation d'intensité due à l'émission de photons par le gaz, κ_{opt} caractérisant l'absorption par le gaz.

A partir de $I(t, \nu, \mathbf{x}, \mathbf{e})$, introduisons trois grandeurs caractérisant le rayonnement :

– la densité d'énergie radiative U^R

$$cU^R = \int I d\Omega d\nu, \quad (\text{A.3})$$

– le flux d'énergie radiative \mathbf{F}^R

$$F_i^R = \int I e_i d\Omega d\nu, \quad (\text{A.4})$$

– le tenseur de pression radiative P_{ij}^R

$$cP_{ij}^R = \int I e_i e_j d\Omega d\nu, \quad (\text{A.5})$$

l'intégration se faisant dans toutes les directions \mathbf{e} définissant l'angle solide $d\Omega$. On peut définir ainsi une infinité de moments liés entre eux par l'équation de SCHWARTZCHILD (A.2). Si, comme c'est usuellement le cas, le rapport v/c tend vers zéro, il est raisonnable de négliger le terme en v/c dans (A.2). Mais l'équation de SCHWARTZCHILD ainsi simplifiée et les définitions de U^R , \mathbf{F}^R et P_{ij}^R ne suffisent pas pour fermer le problème. Pour ce faire, on suppose que, si les gradients de température sont faibles, on a un équilibre thermodynamique local. Donc l'émission d'un élément de fluide suit la loi de Planck et :

$$\int B(t, \nu, \mathbf{x}) d\Omega d\nu = \sigma T^4 / (4\pi),$$

où $4\pi^2\sigma$ est la constante de Stéfán. De plus, comme dans un corps noir, on suppose la pression de radiation localement isotrope et telle que $P_{ij}^R = 1/3 U^R \delta_{ij}$. En intégrant l'équation (A.2) sur les fréquences et les angles solides, on obtient :

$$\nabla F^R = \rho_0 \bar{\kappa}_{opt} (\sigma T^4 / (4\pi) - j), \quad (\text{A.6})$$

où on a introduit $j = c U^R$ pour simplifier les notations par la suite. $\bar{\kappa}_{opt}$ représente un coefficient d'absorption moyen sommé sur toutes les fréquences. De même, en multipliant (A.2) par e_j en intégrant et en tenant compte de la relation de fermeture entre P_{ij}^R et U^R on voit que

$$\nabla j = -3\rho_0 \bar{\kappa}_{opt} F^R. \quad (\text{A.7})$$

Comme on se place dans un cas où la température moyenne T_0 est très grande devant la différence de température entre les plaques ΔT_0 , on peut linéariser en autour de T_0 . Le système d'équations décrivant le mouvement convectif (A.1a) et (A.1b) se complète en présence de radiations des équations :

$$\rho_0 C_v D_t \Delta T = k \nabla^2 \Delta T + \frac{\nabla^2 j}{3\rho_0 \bar{\kappa}_{opt}} \quad (\text{A.8a})$$

$$\nabla^2 j = -3(\rho_0 \bar{\kappa}_{opt})^2 \left(\frac{\sigma}{4\pi} (T_0^4 + 4T_0^3 \Delta T) - j \right) \quad (\text{A.8b})$$

A.2.3 Conditions aux limites.

Dans le cadre de cette étude, on fixe le flux total d'énergie perpendiculairement à la paroi : $(k\partial_z T + (\partial_z j)/(3\rho_0 \bar{\kappa}_{opt}))|_{\pm d} = F_t$, où F_t est une constante. Outre le fait qu'il ait été beaucoup moins étudié que la condition où la température est fixe aux parois, ce cas présente l'intérêt d'être soluble analytiquement.

Pour les vitesses, les deux cas, du glissement sans frottement (où v_x et $\partial_z v_x$ sont nuls aux parois) et du frottement visqueux ($v = 0$), sont très semblables dans leur traitement. On ne traitera pas le cas de conditions aux limites dissymétriques.

La condition supplémentaire nécessaire pour résoudre ce système, est donnée par le comportement du flux radiatif sur les parois. Une infinité de cas est envisageable selon la "couleur" des murs horizontaux, c'est-à-dire selon le taux du flux d'énergie lumineuse absorbée ou réfléchi par la paroi. Les deux cas extrêmes sont :

- la réflexion totale du flux.

Dans cette configuration, le flux radiatif perpendiculairement à la paroi doit être nul. Donc si $F^R|_{\pm d} \cdot \mathbf{e}_z = 0$, on a, d'après la relation de fermeture

$$\partial_z j|_{\pm d} = 0,$$

on retrouve alors que $\partial_z T|_{\pm d} = F_t/k$.

– l’absorption totale.

Dans ce cas, le flux radiatif à la paroi doit être égal à la quantité d’énergie arrivant sur cette paroi par unité de temps.

$$F^R|_{\pm d} \cdot e_z = c \iiint I(x, \nu e_z) d\Omega d\nu \Pi dx_i.$$

Même dans une configuration aussi simple que celle de RAYLEIGH-BÉNARD, l’intégrale ci-dessus ne peut pas être calculée rigoureusement. Une bonne estimation due à Krook [3, 4] conduit à la relation :

$$\partial_z j|_{\pm d} = \mp \sqrt{3} \rho_0 \bar{\kappa}_{opt} j.$$

Pour tenir compte des cas intermédiaires, on introduit un coefficient $\zeta_{\pm} \in [0, 1]$ qui traduit le degré d’absorption au niveau des murs horizontaux (supérieur et inférieur). En résumé les conditions aux limites sont donc :

$$(k \partial_z T + \frac{\partial_z j}{3 \rho_0 \bar{\kappa}_{opt}})|_{\pm d} = F \quad (\text{A.9a})$$

$$\left. \begin{array}{l} v_z|_{\pm d} = 0 \quad \partial_z v_x|_{\pm d} = 0 \\ \text{ou} \\ \mathbf{v} = \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (\text{A.9b})$$

$$\partial_z j|_{\pm d} \pm \zeta_{\pm} \sqrt{3} \rho_0 \bar{\kappa}_{opt} j = 0 \quad (\text{A.9c})$$

A.3 Résultats attendus dans certains cas limites.

A.3.1 Equations sans dimensions.

Le paramètre de contrôle étant le flux total F_t , on introduit les unités : de longueur d , de temps d^2/\mathcal{K} (où $\mathcal{K} = k/\rho_0 C v$ est le coefficient de diffusion thermique), de température $F_t d/k$, de densité d’énergie lumineuse $3 \rho_0 \bar{\kappa}_{opt} F_t/c$. Les équations adimensionnées s’écrivent :

$$Pr^{-1} D_t \mathbf{v} = -\nabla \pi + \nabla^2 \mathbf{v} + Ra \Delta T e_z \quad (\text{A.10a})$$

$$D_t \Delta T = \nabla^2 \Delta T + \nabla^2 j \quad (\text{A.10b})$$

$$\nabla^2 j = \tau^2 \left(j - \lambda/\tau \left(\Delta T + \frac{Ra^\circ}{Ra} \right) \right) \quad (\text{A.10c})$$

avec $\pi = (p + g \rho_0 z) d^2 / \rho_0 \mathcal{K} \nu$, $Ra = \alpha g F_t d^4 / k \nu \mathcal{K}$ et $Pr = \nu / \mathcal{K}$ où ν est maintenant la viscosité dynamique. Il apparaît également deux nouveaux nombres sans dimensions liés aux propriétés optiques du milieu :

- $\tau = \sqrt{3} \rho_0 \bar{\kappa}_{opt} d$, le rapport de la longueur entre les plaques sur la longueur d’absorption optique,
- $\lambda = \sigma T_0^3 d^2 / \sqrt{3} \pi k$ qui peut s’interpréter comme le rapport de la “conductivité radiative” sur la conductivité thermique.

$Ra^0 = \alpha g d^3 T_0 / 4K\nu$ est une constante qui n'apparaîtra plus dans les équations perturbatives.

A.3.2 Etude de certains cas limites.

- Pour $\tau = 0$, il existe alors aucune interaction entre le milieu et le rayonnement. On retrouve les équations de BOUSSINESQ classiques.
- $\tau \gg 1$ et $\lambda/\tau \ll 1$ c'est-à-dire avec un fluide très absorbant et à basse température moyenne T_0 (i.e, à faible émission radiative) on a $j \sim 0$. Cette limite est en fait le cas expérimental de la convection dans un liquide à température ambiante. On notera toutefois qu'on néglige ici le terme dérivé le plus grand nombre de fois parce que le coefficient qui le précède $1/\tau^2$ est supposé tendre vers zéro. Mais c'est une limite singulière. Il existe là aussi des phénomènes de "couches limites" d'épaisseur $1/\tau$. Par ailleurs, aux très grands τ , nos approximations de faibles gradients et d'isotropie locale du rayonnement apparaissent moins justifiées.
- La limite $\lambda \gg \tau \gg 1$ est aussi intéressante puisqu'alors : $\lambda/\tau(\Delta T + Ra^0/Ra) \sim j$ d'où $D_t \Delta T \sim \lambda/\tau \nabla^2 \Delta T$. Si on réajuste la diffusivité thermique avec λ/τ on revient, là encore, à la convection sans radiation. Dans cette limite stellaire de très forte conductivité radiative, c'est à dire avec une très haute température T_0 , le nouveau nombre de Prandlt redéfini par $\tilde{Pr} = Pr \tau/\lambda$ tend vers zéro. On s'attend alors à une dynamique différente du système.

A.3.3 Différences attendues entre la convection radiative et non radiative.

Il existe cependant une différence fondamentale entre le cas radiatif et non radiatif. En effet, sans radiations, les équations du mouvement et les conditions aux limites sont invariantes par translation de l'origine des températures. Cette invariance impose un premier mode instable de la température de longueur d'onde infinie, puisque cela revient à ajouter une constante. La courbe de stabilité marginale est alors minimale en 0. Un développement en petit nombre d'onde permet d'obtenir le seuil d'instabilité et de montrer que le mode de plus grande longueur d'onde sera toujours le plus instable [5].

Dès que l'on tient compte des radiations, nous n'avons plus cette invariance. Malgré cela, la condition de flux total fixé impose une valeur finie à la courbe de stabilité marginale à nombre d'onde nul. Comme celle-ci est paire, l'ordonnée à l'origine est un extrémum. On peut donc envisager trois cas :

- le nombre d'onde nul est toujours le seul minimum quelque soit la valeur de τ ou de λ (Figure A.2.A) ,
- le nombre d'onde nul est un maximum de la courbe (figure A.2.B). Il existe alors une première instabilité qui apparaît à longueur d'onde finie. En variant les paramètres optiques, on doit observer plusieurs régimes afin de retrouver les cas limites présentés ci-dessus.

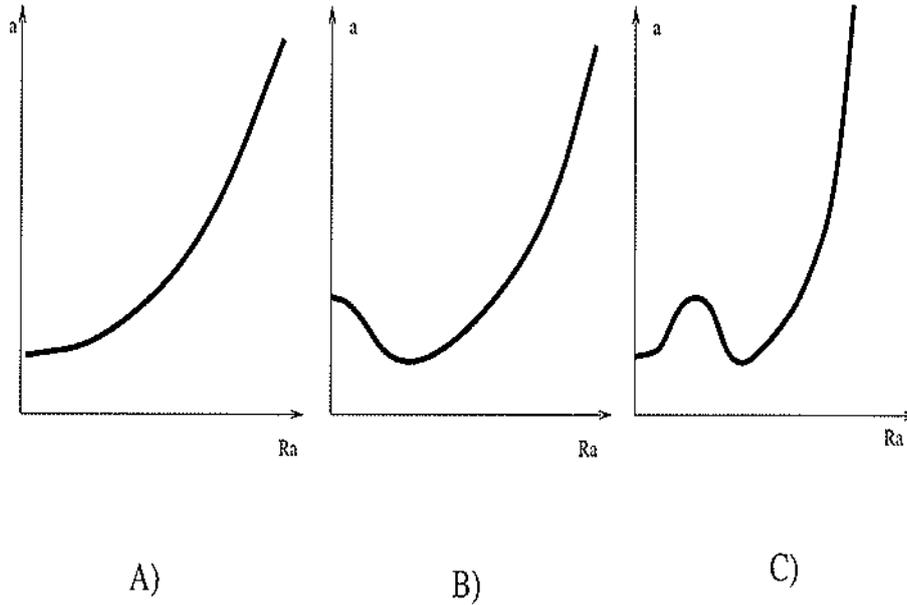


FIG. A.2 – Formes attendues de la courbe de stabilité marginale

- Le nombre d'onde nul est un minimum mais il en existe d'autre (figure A.2.C). Dans ce cas très intéressant, qui avait motivée notre étude, plusieurs modes pourraient croître en concurrence.

A.4 Seuil d'instabilité et courbe de stabilité marginale.

A.4.1 Etat statique et effet stabilisant des radiations.

Pour obtenir la courbe de stabilité marginale, il faut tout d'abord établir la forme du gradient statique de température. Lorsque les vitesses sont nulles et les variables indépendantes du temps, le problème est alors unidimensionnel dans la direction z . Le système formé des équations (A.1) et (A.8) avec les conditions (A.9) devient facilement soluble. Pour $\zeta_+ = \zeta_- = 0$ (mur réfléchissant) le gradient de température prend la forme simple

$$D\Delta T_O(z) = - \left(\frac{\tau^2}{\gamma^2} + \frac{\tau\lambda}{\gamma^2 \cosh(\gamma)} \cosh(\gamma z) \right) \quad (\text{A.11})$$

représentée figure A.3. Il apparaît la nouvelle longueur caractéristique $\gamma^{-1} = (\tau^2(1 + \lambda/\tau))^{-1/2}$.

On voit figure A.3 que les forts gradients se concentrent sur ces distances γ^{-1} , inférieures à 1. En convection classique, sans radiation, le gradient statique de température est linéaire entre les plaques, et le seuil d'instabilité décroît comme la distance qui sépare ces plaques à la puissance trois. Ici, on s'attend donc à voir le seuil d'instabilité augmenter comme γ^3 .

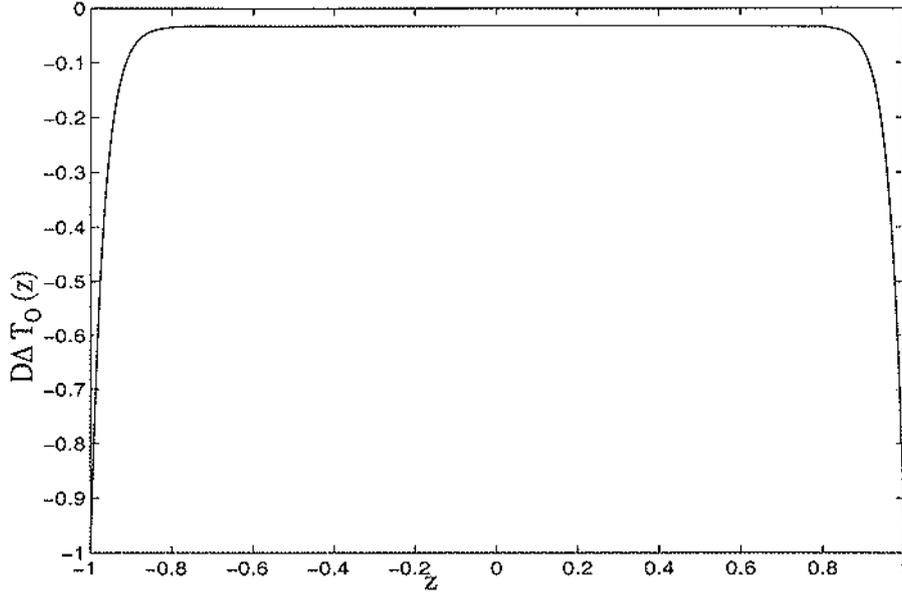


FIG. A.3 - Gradient statique de la température pour $\tau = 1$ et $\lambda = 50$ soit $\gamma^{-1} = 0,14$.

A.4.2 Equations perturbatives.

On cherche à connaître la stabilité de cet état statique en perturbant celui-ci avec v , $\Delta T = \Delta T_0(z) + \theta$, $j = j_0(z) + j$. On élimine le terme de pression en introduisant la fonction courant ψ tel que $v_x = -\partial_z \psi$; $v_z = \partial_x \psi$. Les équations perturbatives s'écrivent alors :

$$Pr^{-1} D_t \nabla^2 \psi = \nabla^4 \psi + Ra \partial_x \theta \quad (\text{A.12a})$$

$$D_t \theta + D \Delta T_0(z) \partial_x \psi = \nabla^2 \theta + \nabla^2 j \quad (\text{A.12b})$$

$$\nabla^2 j = \tau^2 (j - \frac{\lambda}{\tau} \theta) \quad (\text{A.12c})$$

Pour établir la courbe de stabilité marginale, on linéarise le système d'équations ci-dessus et on pose :

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \theta \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \theta_0 \\ j_0 \end{pmatrix} \Big| \cdot \exp(\mu t + iax).$$

Où μ , comme dans la convection sans rayonnement, est réel. Pour $\mu = 0$, il existe une relation entre Ra et a , pour laquelle le système (A.12) linéarisé est soluble. Cette relation donne la courbe de stabilité marginale $Ra = f(a)$.

A.4.3 Résolution numérique et commentaires.

Les résultats d'une résolution numérique du problème sont présentés figures A.4 et A.5 pour différents paramètres optiques avec les conditions aux limites miroirs ($\zeta_{\pm} = 0$). La figure A.4

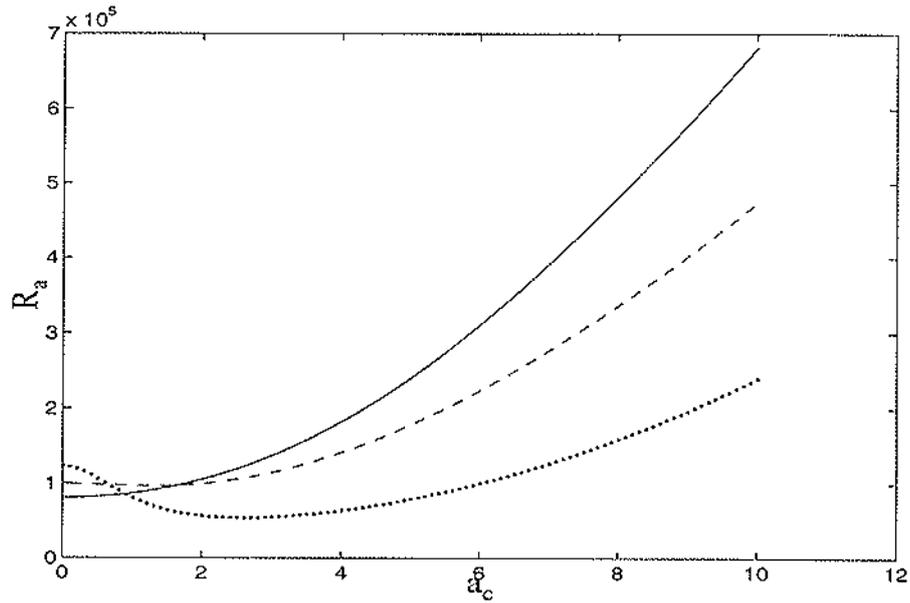


FIG. A.4 – Courbe de stabilité marginale pour $\lambda = 100$ et $\tau = 1$ (ligne pointillée), $\tau = 1,8$ (ligne interrompue), $\tau = 2$ (ligne continue)

donne la forme des courbes de stabilité marginale lorsque τ varie. La figure A.5 montre la valeur du premier mode instable (pour lequel $Ra(a)$ est minimum) en fonction de λ et τ . On constate que :

- La courbe de stabilité marginale ne présente qu'un seul minimum quelque soit le domaine des paramètres optiques exploré.
- Ce minimum est en zéro pour les grandes valeurs de λ et τ ce qui nous permet de retrouver les cas limites exposés ci-dessus.
- Le cas $\tau = 0$ est singulier. Dès qu'il apparaît une absorption, l'invariance par translation de l'origine des températures est brisée. L'instabilité apparaît donc à une longueur d'onde finie.

Ces résultats restent vrais lorsqu'on modifie les conditions aux limites.

Lorsque cela aura un sens, c'est-à-dire lorsque le minimum de la courbe de stabilité marginale sera proche de zéro, on peut utiliser une méthode de développement aux grandes échelles, similaire à celle utilisée par Chapman et Proctor [5]. Un calcul au premier ordre nous donnera l'ordonnée à l'origine, qui correspond au minimum aux grandes valeurs de λ et τ . Grâce deuxième ordre on devrait pouvoir déterminer analytiquement les domaines de paramètres pour lesquels il existe un minimum différent de zéro.

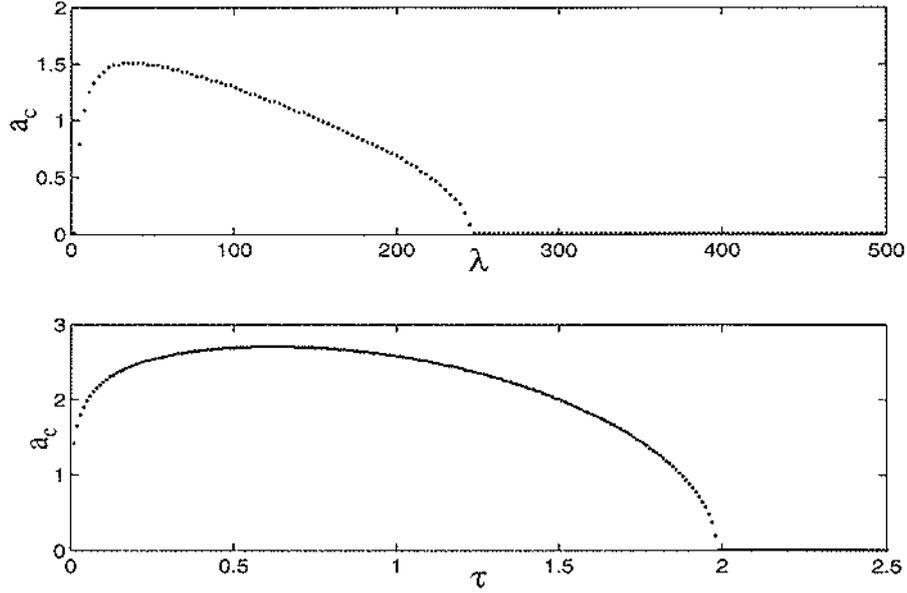


FIG. A.5 - Evolution du premier mode instable en fonction des paramètres optiques. Sur la courbe du haut $\tau = 1,8$; sur celle du bas $\lambda = 100$.

A.4.4 Développement aux grandes longueurs d'onde.

On se limitera dans ce qui suit aux conditions aux limites miroirs. La méthode consiste à développer les équations du mouvement autour des grandes valeurs de x en posant $x = \epsilon X$ dans l'équation (A.12). Compte tenu des temps de diffusion aux grandes échelles, la dynamique à grandes distances est en $t = \epsilon^4 T$. Grâce aux symétries, on sait que ψ , θ , j et Ra se développent comme :

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \theta_0 \\ j_0 \end{pmatrix} + \epsilon^2 \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \theta_2 \\ j_2 \end{pmatrix} + \dots,$$

où $\psi = \epsilon\varphi$, et $Ra = Ra_0 + \epsilon^2 Ra_2 + \dots$. Le calcul de Ra_0 nous donne la valeur du nombre de RAYLEIGH critique de nombre d'onde nul. Le signe de Ra_2 nous permet de savoir si Ra_0 est un minimum ou un maximum de la courbe de stabilité marginale.

Premier ordre.

Le système d'équations (A.12), au premier ordre en ϵ , donne φ_0 , θ_0 , j_0 en fonction de z , Ra_0 , λ et τ . Ce n'est que l'intégration en z de l'équation de la chaleur au deuxième ordre avec nos conditions de flux fixe aux parois, qui donne la relation souhaitée entre Ra_0 , λ et τ . C'est de cette condition de solvabilité que l'on déduit

$$Ra_0(\lambda, \tau) = \frac{2 \cdot \gamma^4}{\tau^4 [\lambda/\tau (2/\gamma^5 \tanh(\gamma) + 4/3\gamma^2 - 2/\gamma^4) + 4/15]} \quad (\text{A.13})$$

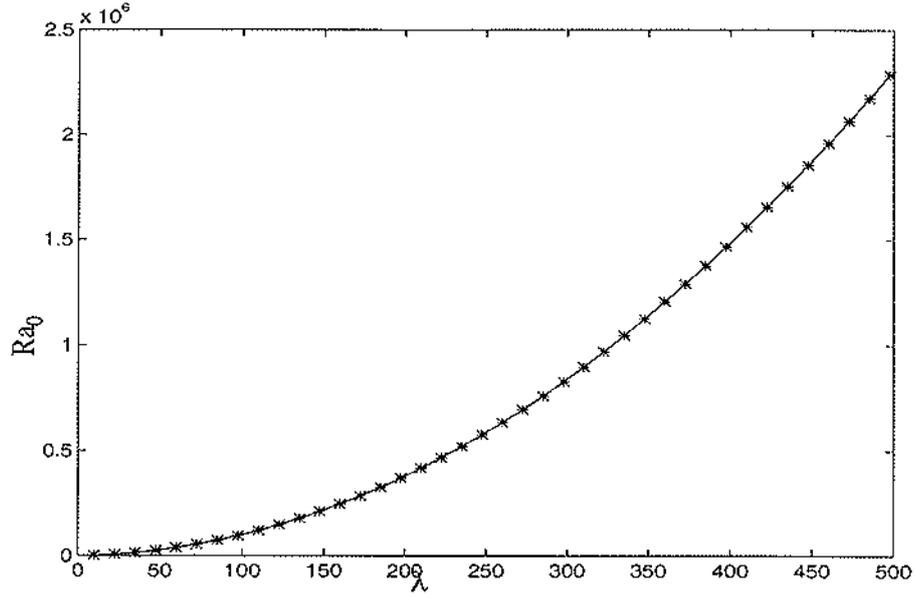


FIG. A.6 – Comparaison entre le résultat analytiques de Ra_0 (ligne continue) et le calcul numérique de $Ra(0)$ (étoile)

où on a toujours $\gamma^2 = \tau^2(1 + \lambda/\tau)$. On notera que pour les cas limites on retrouve la valeur attendue dans cette configuration de la convection sans radiation : $Ra_0 = 15/2$. La figure A.6 compare les valeurs de l'ordonnée à l'origine, calculées par la méthode numérique précédente ou avec la formule ci-dessus (A.13). Le très bon accord observé nous permet de valider notre méthode de résolution numérique.

A.5 Pour aller plus loin.

Le calcul au deuxième ordre de φ_2 , θ_2 , j_2 n'impliquant que des polynômes et des fonctions hyperboliques, est soluble analytiquement. La condition de solvabilité à cette ordre conduit à une équation du type :

$$\begin{aligned} \partial_T B(X, T) + \frac{Ra_2(\lambda, \tau)}{Ra_0(\lambda, \tau)} \partial_{XX} B(X, T) + \mathcal{A}(\lambda, \tau) \partial_{X^4} B(X, T) \\ - B(\lambda, \tau) \partial_X \left[(\partial_X B(X, T))^3 \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Où $B(X, T)$ est proportionnel à l'amplitude du mode instable de température de l'ordre précédent. C'est une fonction lentement variable du temps ($T = \epsilon^4 t$) et de l'espace ($X = \epsilon x$). $\mathcal{A}(\lambda, \tau)$ et $\mathcal{B}(\lambda, \tau)$ se calculent à partir de φ_2 , θ_2 et j_2 . Quand on considère une solution onde plane stationnaire pour $B(X, T)$: $B(X) = B_0 \exp(iKX)$, on en déduit que :

$$Ra_2(\lambda, \tau) \propto Ra_0(\lambda, \tau) \mathcal{A}(\lambda, \tau).$$

Du signe de $Ra_2(\lambda, \tau)$, on peut déduire la courbure de la courbe de stabilité marginale au voisinage de 0 et trouver ainsi les valeurs de λ et τ pour lesquelles on passe d'une première instabilité à longueur d'onde finie à une première instabilité à longueur d'onde infinie. Malheureusement le calcul de \mathcal{A} et \mathcal{B} s'avère difficile et leurs expressions peu exploitables. Une étude de cas limite à petit γ^{-1} pourrait être profitable.

On peut envisager une vérification expérimentale pour certains gaz dont le spectre d'absorption est suffisamment large. La difficulté est d'avoir une bonne estimation de l'absorption moyenne $\bar{\kappa}_{opt}\rho_0$. Le TABLEAU I donne les valeurs τ et λ pour trois gaz à effet de serre. Les valeurs $\bar{\kappa}_{opt}\rho_0$ sont tirées de [6]. On voit que la valeur de τ est dans le domaine de paramètre intéressant de figure A.5. De plus la grande variabilité de λ avec la température moyenne (en T_0^3) permet de faire varier facilement ce paramètre sur un large domaine.

Gaz :	CO_2	H_2O	O_3
τ	1,5	1,3	2,3
λ	21,3	18,9	11,0

TABLEAU I: Valeurs des paramètres optiques λ et τ pour le dioxyde de carbone, la vapeur d'eau et l'ozone en convection dans une cellule de 10 cm à une température moyenne de 600 K

Bibliographie

- [1] Goody, R.M 1956, JFM, vol 1
- [2] Gille, J. & Goody R.M 1964, JFM, vol 20, part 1
- [3] Edwards J.M. 1990, Mon.N str.Soc, Vol 242
- [4] Krook, M. 1965, M. ApJ, 122
- [5] Chapman, C.J and Proctor, M.R.E 1980, JFM, vol 1, part 4
- [6] Goody, R.M 1964, *Atmospheric radiation*, Oxford University Press.

Annexe B

Equations générales pour un fluide en interaction avec un gaz de photons.

Pour bien comprendre les différentes approximations, on peut prendre comme point de départ les équations d'un gaz de photons relativistes en interaction avec les atomes du gaz. R. Simon [1] obtient les équations de conservation ci-dessous, à partir de l'équation de Boltzmann qui peut-être généralisée au gaz de photons, et en tenant compte des invariants relativistes :

- Pour la masse totale

$$\partial_t \rho + \partial_i \rho v_i = 0 \quad (\text{B.1})$$

- Pour la quantité de mouvement totale

$$\partial_t(\rho v_i) + \partial_j(\rho v_i v_j + P_{ij} + P_{ij}^R) + 1/c^2(\partial_t F_i^R + \partial_j(F_i^R v_j + F_j^R v_i)) = \rho g_i \quad (\text{B.2})$$

- Pour l'énergie totale

$$\partial_t(U + U^R + 1/2 \rho |v|^2) + \partial_i((U + U^R + 1/2 \rho |v|^2)v_i) + \partial_i((P_{ij} + P_{ij}^R)v_j + F_i + F_i^R) = 0 \quad (\text{B.3})$$

avec ρ, v, c respectivement la masse volumique, la vitesse d'un élément fluide et la vitesse de la lumière ; et où U, F, P représentent respectivement l'énergie interne, le flux d'énergie et le flux des

quantités de mouvement (ou l'opposé du tenseur des pressions). L'exposant R indique les grandeurs se référant aux gaz de photons. Ces équations ne sont valables que pour un milieu sans charges libres.

Si on considère, comme dans l'approximation de BOUSSINESQ, que le fluide est incompressible, alors le flux des quantités de mouvement s'écrit $P_{ij} = p\delta_{ij} - \eta(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$. Si on accepte l'approximation précédente qui revient, entre autre, à supposer la vitesse du fluide petite devant celle du son, on doit nécessairement prendre la limite $|v| \ll c$. Cela va grandement simplifier notre système puisque U^R et P_{ij}^R sont de l'ordre de $|F^R|/c$ comme le montre les équations (A.3-5) de l'annexe A. A l'ordre 0 en $|v|/c$ les équations de conservation de la masse (B.1) et de la quantité de mouvement (B.2) deviennent celles obtenues sans radiations. Dans l'équation (B.3) seul le gradient de flux radiatif survit à cet ordre. Compte-tenu de l'incompressibilité, on retrouve alors (A.1c).

Bibliographie

[1] Simon R. 1963, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer.*, vol 3 p1

Rappel Bibliographique.

Chapitre 1: Introduction: Rappels de résultats théoriques sur la statistique des grandeurs globales

1. Landford, O.E. 1973, *Statistical Mechanics and Mathematical Problems*, Lect. Notes in Physics, vol 20, p 1. ed. A.Lenard. Springer, Berlin
2. Gallavotti G. and Cohen E.G.D. 1995, Phys. Rev. Lett., vol 74, n 14, p 2694.
3. Dorfman J.R. 1994, *From molecular chaos to dynamical chaos*, Lectures at the Institute for Theoretical Physics, University of Utrecht.
4. Evans D. J., Cohen E.G.D. and Morriss G.P. 1993, Phys. Rev. Lett., vol 71, n 15, p 2401.
5. Eckmann J.-P. and Ruelle D. 1985, Rev. Mod. Phys., vol 57, p 617
6. Morriss G. P. and Rondoni L., 1996, Physica A, vol 233, p 767.
7. Gallavotti G. and Cohen E.G.D. 1995, J. Stat. Phys., vol 80, n5/6, p 931.
8. Gallavotti G. 1996, Phys. Rev. Lett., vol 77, n , p 4334.
9. Gallavotti G. 1998, Chaos, vol 8, n 2, p 384.

Chapitre 2: Mesures locales des forces de traînée et de leurs corrélations spatiales dans l'écoulement de VON KÁRMÁN.

1. R. Labbé, J.-F. Pinton, S. Fauve 1996, Journal de Physique II, vol 35 p 1099.
2. L. Landau, E. Lifchitz 1971, Mécanique des fluides, Ed. Mir, p .
3. R. Labbé, "Ecoulement tourbillonnaire de Von Kármán" , Thèse de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, 1996.
4. S. Fauve, C. Laroche, B. Castaing 1993, Journal de Physique II, vol 3 p 271.

5. O. Cadot, S. Douady, Y. Couder 1995, *Physics of fluids A*, vol 7 n 3 p 630.
6. M. Holzer, E.D. Siggia 1993, *Physics of fluids A*, vol 5 n 10 p 2525.
7. R.H. Kraichnan 1974, *J. Fluid Mech.*, vol 62 part 2 p 305.

Chapitre 3 : Fluctuations globales de température et de flux thermique en convection de RAYLEIGH--BÉNARD turbulente

1. W.V.R. Malkus 1964, "Boussinesq equations and convection energetique", WHOI Geophysical Fluid Dynamics Notes, ref 64-46 chp 2 p 11.
2. G.I. Barenblatt 1979, "Similarity, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics", Consultant Bureau New-York.
3. X. Chavanne 1997, " Etude du regime turbulent en convection de Rayleigh-Bénard dans l'hélium liquide ou gazeux autour de 5 K", Thèse de l'université Joseph Fourier Grenoble I.
4. F.H. Busse 1978, *Rep. Prog. Phys.*, vol 41 p 1929.
5. D.C. Threlfall 1975, PhD thesis, Cambridge university.
6. B. Castaing, G. Gunaratne, F. Heslot, L. Kadanoff, A. Libchaber, S. Thomae, X.Z. Wu, S. Zaleski and G. Zanetti 1989, *J. fluid Mech.*, vol. 204 p1.
7. E.D. Siggia 1994, *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, vol. 26 p 137.
8. A. Chiffaudel 1989, "Dynamique Spacio-Temporelle de la Convection à Bas Nombre Prandtl" thèse de l'ENS et l'université Paris VII.
9. L. Landau et E. Lifchitz 1976, "Physique théorique tome V : physique statistique", Mir Moscou.
10. A. Onuki, H. Hao R.A. Ferrell 1990, *Phys Rev A*, vol 41, n 4, p 2256.
11. B. Zappoli, D. Bailly, Y. Garrabos, B. Le Neindre, P. Guenoun and D. Beysens 1990, *Phys. Rev. A*, vol 41 n 4 p 2264
12. M. Salzmann , "Les Capteurs de l'instrument ALICE", Rapport de fin d'étude du DEA instrumentation et mesure.
13. W. Merzkirch 1987, "Flow Visualisation", Second edition, Academic Press.
14. F. Chilla, S. Ciliberto, C. Innocenti, E. Pampaloni 1993, *Nuovo Cimento*, vol 15 D p 1229.
15. A. Michels and J. Hamers 1937, *Physica*, vol 4, p 995.
16. S. Grossmann and D. Lohse 1999, à paraître.
17. M. Neufeld et R. Friedrich 1995, *Phys. Rev. E*, vol 51, n 3, p 2033.
18. S Cioni 1996, thèse de doctorat de l'ENS de Lyon.

Chapitre 4 : Test de la loi de EVANS, COHEN, MORRIS (“ théo- rème de GALLAVOTTI–COHEN”) sur quelques systèmes phy- siques.

1. G. Gallavotti et E.G.D. Cohen 1995, *J. Stat. Phys.*, vol 80 n 5/6 p 931.
2. R. Burridge et L. Knopoff 1967, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, vol 57 p341
3. M. de Sousa Vicira 1992, *Phys. Rev. A*, vol 46 n 10 p 6288.
4. P.J.Holmes 1982, *J. sound Vib.*, vol 84, p 173.
5. S. Mc Namara, J.-L. Barrat 1996, *Phys. Rev. E*, vol 55 n 6 p 7767.
6. U. Frisch 1995, ‘Turbulence’, Cambridge University press.
7. K. Ohkitani and M. Yamada 1989, *Progr. Theoret. Phys.* vol 89 p.
8. L. Biferale, D. Pierotti and A. Vulpiani 1998, *Journal of physic a*, vol 31, p 21.
9. G. Gallavotti 1998, *Chaos*, vol 8, n 2, p 384.
10. S. Ciliberto and C. Laroche 1998, *J. Phys.IV France*, vol 8 p 215.
11. G. Gallavotti 1997, *Physica D* ,vol 105 n1/3 p 163 (à vérifier).

Chapitre 5 : Conclusions.

1. A. Pumir 1996, *Phys. Fluids*, vol 8 n 11 p 3112.

Annexe 1 : Influence du transfert radiatif sur la convection à flux fixé.

1. Goody, R.M 1956, *JFM*, vol 1
2. Gille, J. & Goody R.M 1964, *JFM*, vol 20, part 1
3. Edwards J.M. 1990, *Mon.N str.Soc*, Vol 242
4. Krook, M. 1965, *M. ApJ*, 122
5. Chapman, C.J and Proctor, M.R.E 1980, *JFM*, vol 1, part 4
6. Goody, R.M 1964, *Atmospheric radiation*, Oxford University Press.

Annexe 2 : Equations générales pour un fluide en interaction avec un gaz de photons.

1. Simon R. 1963, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer., vol 3 p1

Resumé

Les fluctuations de puissance injectée dans des écoulements turbulents ont été étudiées sur deux dispositifs expérimentaux : la convection de RAYLEIGH-BENARD et l'écoulement confiné de VON KÁRMÁN entre deux disques contra-rotatifs. Des mesures originales de forces sur une pale en mouvement dans l'écoulement de VON KÁRMÁN, de flux thermique, de la température et de son gradient moyennés sur une ligne en convection, nous ont permis de mettre en évidence les corrélations qui existent sur de grandes échelles spatiales au niveau des mécanismes d'injection d'énergie dans les écoulements turbulents.

Ces corrélations invalident une partie des hypothèses couramment utilisées pour prédire le comportement général des fluctuations relatives de toute grandeur globale lorsque le degré de développement de la turbulence d'un écoulement augmente. L'utilisation de trois cellules, avec différents fluides, nous a permis d'estimer ces fluctuations relatives, sur trois décades en nombre de RAYLEIGH, pour le flux thermique en convection de RAYLEIGH-BENARD. On a ainsi constaté une croissance linéaire inattendue pour l'écart type du flux thermique en fonction du gradient de température imposé aux parois.

Dans une dernière partie, nous nous sommes attachés à tester la validité des prédictions de la loi de EVANS, COHEN, MORRIS sur les fluctuations de puissance dans les systèmes dissipatifs hors-équilibre. Nous avons ainsi étudié au regard de cette loi : le modèle numérique de BURRIDGE-KNOPOFF d'une chaîne de patins à frottement non linéaire, des simulations de milieux granulaires vibrés 2D, le modèle en couche GOY et nos mesures expérimentales de la puissance injectée dans des écoulements turbulents.

abstract

The fluctuation of total injected power in turbulent flow have been studied in two experimental devices: the RAYLEIGH-BENARD convection and the VON KÁRMÁN swirling flow between two counter-rotating disk. Original measurements of drag on a moving blade in a VON KÁRMÁN flow, of thermal flux, temperature and its gradient integrated on a line in convection, show large scale spatial correlations in energy injection mechanisms.

Those correlations are inconsistent with some assumption usually made to predict the general behaviour of the relative fluctuations of global variables when turbulence grow. With three different convective cells and various fluids, we have measure a power laws for relative fluctuations of some global variables on a large RAYLEIGH number range. For instance, we exhibit a striking linear relation between the standart deviation of thermal flux and the temperature difference at the boundaries.

In the last part, we try to test the prediction of the EVANS, COHEN, MORRIS's law about power injected in non-equilibrium dissipative systems. To wit, we have studied: the BURRIDGE-KNOPOFF model of a chain of blocks pulled on a rough surface with a non linear friction force, the simulation of 2D vibrated granular media, the GOY shell model and our experimental data of power injected in turbulent flows.

